Университетский лицей

Л.А. Осипенко

КОМБИНАЦИИ СФЕРЫ И МНОГОГРАННИКОВ. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Иркутск 2009

Федеральное агентство по образованию РФ
Иркутский государственный университет
Лаборатория педагогического творчества
Лицей ИГУ

Осипенко Л.А.

КОМБИНАЦИИ СФЕРЫ И МНОГОГРАННИКОВ. ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

Методическое пособие

Иркутск
2009

Осипенко Л.А. Комбинации сферы и многогранников. Задачи и упражнения: методическое пособие. – Иркутск, 2009. – 49 с.: ил. – (Серия «Университетский лицей»)

Рассматриваются методы решения задач на комбинации пирамиды и призмы с вписанными и описанными сферами, а также некоторые нестандартные случаи расположения сферы и этих многогранников.

Предназначено для учителей и учащихся лицеев, гимназий и общеобразовательных школ. Может быть использовано при подготовке к ЕГЭ.

Рецензенты: Кузьмин О.В., д.ф.-м. н., профессор ИГУ,
Кузуб Н.М., к.ф.-м.н., доцент ИГПУ

ВВЕДЕНИЕ

В курсе стереометрии задачи, содержащие комбинации различных геометрических тел, являются наиболее интересными. Их решение требует и хорошего геометрического воображения и фактических знаний из различных разделов школьного курса геометрии. При этом наиболее разнообразные задачи получаются при различных комбинациях сферы и многогранников. Это, прежде всего, сочетание выпуклого многогранника с вписанной и описанной сферой, хотя не редко рассматриваются и другие случаи их взаимного расположения.

В данном методическом пособии подробно рассматриваются методы решения задач на комбинации пирамиды и призмы с вписанными и описанными сферами, а также некоторые нестандартные случаи расположения сферы и этих многогранников. Приводится ряд полезных упражнений, а также сформулированы некоторые имеющие практическое значение утверждения, доказательство которых можно также рассматривать как отдельные упражнения.

Для решения задач, содержащих различные комбинации выпуклых многогранников и сферы, как правило, возникает необходимость определить расположение центра сферы и точек касания сферы с различными плоскостями и прямыми. С этой целью можно использовать следующие свойства и утверждения.

Свойства секущих и касательных к сфере

1. Если две прямые пересекаются в точке S и касаются сферы в точках K и L, то $SK = SL$.
2. Если две прямые пересекаются в точке S, и одна из них касается сферы в точке K, а другая пересекает сферу в точках A и B, то $SA \cdot SB = SK^2$.
3. Если две прямые пересекаются в точке S и пересекают сферу в точках A, B и C, D, то $SA \cdot SB = SC \cdot SD$.

Геометрические места точек в пространстве

1. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух точек – плоскость, проходящая через середину отрезка, соединяющего данные точки, и перпендикулярная к нему. Каждая точка этой плоскости является центром сферы, проходящей через данные точки.
2. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух пересекающихся прямых – две плоскости, перпендикулярные плоскости данных прямых, проходящие через биссектрисы углов между этими прямыми. Каждая точка такой плоскости является центром сферы, касающейся данных прямых.

Замечание. Отсюда, в частности, следует, что ортогональная проекция точки, равноудаленной от сторон данного угла, лежит на его биссектрисе.

3. Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей – две плоскости, делящие пополам двугранные углы между этими плоскостями (*биссекторные или биссектральные* плоскости). Каждая точка биссекторной плоскости является центром сферы, касающейся данных плоскостей.
4. Геометрическое место точек, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой, – прямая, проходящая через центр окружности, проведенной через данные точки и перпендикулярная плоскости, содержащих данные точки. Каждая точка этой прямой является центром сферы, проходящей через данные три точки.

I Вписанная сфера

Сфера (шар) называется вписанной (вписанным) в выпуклый многогранник, если она (он) касается всех его граней.

Центр O вписанной сферы – точка, равноудаленная от всех граней многогранника (рис. 1).

Из определения следует, что если OA, OB, OC … – перпендикуляры, опущенные из центра сферы на грани многогранника, то $OA = OB = OC = \ldots$.

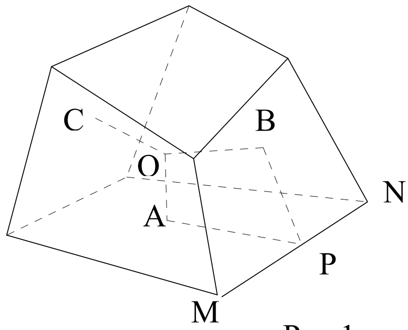

Рис.1

Упражнение 1. Доказать, что если из точек A и B (рис.1) опустить перпендикуляры на ребро MN по которому пересекаются грани, содержащие точки A и B, то их основанием будет одна и та же точка P .

Теорема 1. *Если в выпуклый многогранник вписана сфера, то её центр является точкой пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов многогранника. Обратно в выпуклый многогранник можно вписать сферу, если биссекторные плоскости всех его двугранных углов пересекаются в одной точке.*

Доказательство теоремы 1 основывается на том факте, что биссекторная плоскость двугранного угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от его граней.

Если известны объем V и полная поверхность S выпуклого многогранника, то радиус вписанной сферы r можно вычислить по формуле

$$r = \frac{3V}{S}. \qquad (1)$$

Действительно, объем выпуклого многогранника равен сумме объемов пирамид, которые получаются, если соединить центр вписанной сферы со всеми его вершинами. Высота каждой такой пирамиды равна радиусу r. Если S_1, S_2 ... – площади граней многогранника, то

$$V = \frac{1}{3}S_1 \cdot r + \frac{1}{3}S_2 \cdot r + ... = \frac{1}{3}r \cdot (S_1 + S_2 + ...) = \frac{1}{3}r \cdot S.$$

Выражая r, получаем формулу (1).

Пирамида и вписанная сфера

Используя теорему 1 можно доказать следующие утверждения:

1. В любую треугольную пирамиду можно вписать сферу.
2. В правильную n-угольную пирамиду можно вписать сферу.
3. Центр сферы, вписанный в правильную пирамиду, лежит на ее высоте.

Вопрос о положении центра вписанного шара является ключевым, и его решение требует определенных навыков и геометрического воображения. В отдельных случаях (см. задачи1 и 2) могут быть полезными следующие упражнения:

Упражнение 2. Доказать, что если вершина описанной пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в ее основание, то центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды.

Упражнение 3. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из любой точки высоты пирамиды на высоту боковой грани, перпендикулярен плоскости этой грани.

Задача 1. *В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, зная, что отношение объема пирамиды к объему шара равно* $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

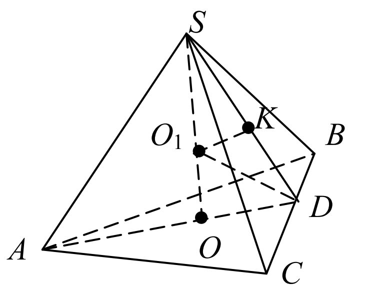

Рис. 2

Решение. Пусть $SABC$ – данная пирамида, SO – её высота (рис. 2). Проведем $SD \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах

$OD \perp BC$, следовательно, отрезок BC перпендикулярен плоскости OSD и угол SDO является линейным углом двугранного угла с ребром BC. Пусть O_1 – центр вписанного шара, $O_1 \in SO$. Проведем $O_1K \perp SD$. Так как $O_1K \perp BC$, то отрезок O_1K перпендикулярен плоскости SBC (см. упражнение 3) и, следовательно, K – точка касания шара с гранью SBC. Обозначим объем пирамиды через V_1, объем шара через V_2, искомый угол SDO через α, высоту пирамиды SO через h, радиус вписанного шара через r; $O_1K = O_1O = r$. Соединим точки D и O_1. Так как $O_1K = O_1O$, то O_1D – биссектриса угла SDO, $\angle O_1DO = \dfrac{\alpha}{2}$.

Вычислим объём пирамиды, имеем: $OD = r \cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}$,

$AB = 2\sqrt{3} \cdot OD = 2\sqrt{3}\, r \cdot ctg\dfrac{\alpha}{2}$, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}AB^2 = 3\sqrt{3}\, r^2 \cdot ctg^2\dfrac{\alpha}{2}$, $SO = OD \cdot tg\angle SDO = = r \cdot ctg\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha$. Таким образом,

$$V_1 = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SO = \sqrt{3}r^3 \cdot ctg^3\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha .$$

Так как по условию задачи $4\pi V_1 = 27\sqrt{3}V_2$, и $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi \cdot r^3$,

то

$$3 \cdot ctg^3\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha = 27 . \qquad (2)$$

Применяя тригонометрические формулы двойного угла, преобразуем уравнение (2) к виду

$$2 \cdot ctg^4\frac{\alpha}{2} - 9 \cdot ctg^2\frac{\alpha}{2} + 9 = 0 .$$

Отсюда, либо $ctg^2\dfrac{\alpha}{2} = 3$, либо $ctg^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{3}{2}$.

Так как угол α острый, то получаем два возможных значения искомого угла:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{3},\ \alpha_2 = 2arcctg\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Задача 2. *Сфера радиуса r вписана в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом* α. *Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом* β. *Найти объем пирамиды.*

Решение. Пусть $SABCD$ данная пирамида, $\angle BAD = \alpha$. Так как все грани пирамиды наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высота пирамиды проходит через центр окружности, вписанной в основание, то есть через точку O пересечения диагоналей ромба (рис. 3).

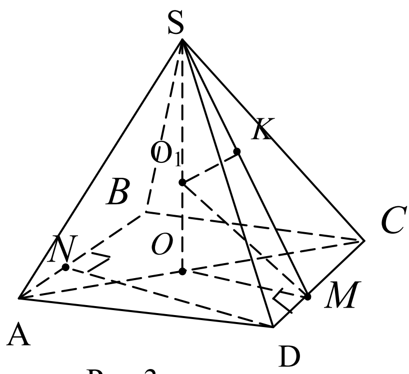

Рис.3

Пусть далее, $SM \perp DC$, тогда $OM \perp DC$ и $\angle SMO = \beta$. Обозначим через O_1 центр вписанной сферы, $O_1 \in SO$ (упражнение 2). Проведем $O_1K \perp SM$, тогда $O_1K \perp SDC$ (упражнение 3) и K – точка касания сферы с гранью SDC; $O_1K = O_1O = r$. Из прямоугольного треугольника SO_1K $(\angle SKO_1 = 90°)$ получаем $SO_1 = \dfrac{O_1K}{\cos\angle SO_1K} = \dfrac{r}{\cos\beta}$.

Следовательно, $SO = SO_1 + OO_1 = \dfrac{r}{\cos\beta} + r = \dfrac{2r\cdot\cos^2\dfrac{\beta}{2}}{\cos\beta}$.

Так как $O_1O = O_1K$, то MO_1 – биссектриса угла SMO и $\angle O_1MO = \dfrac{\beta}{2}$. Из прямоугольного треугольника O_1OM, имеем

$$OM = OO_1 \cdot ctg\angle O_1MO = r \cdot ctg\frac{\beta}{2}.$$

Вычислим площадь ромба $ABCD$. Имеем:

$$AD = \frac{DN}{\sin\alpha} = \frac{2r \cdot ctg\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha},\; S_{ABCD} = AD^2 \cdot \sin\alpha = \frac{4r^2 \cdot ctg^2\frac{\beta}{2}}{\sin\alpha}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO = \frac{8r^3 \cdot ctg^2\frac{\beta}{2} \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}}{3 \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha}.$$

В некоторых случаях, когда определение положения центра вписанного шара требует дополнительных исследований, можно воспользоваться формулой (1). Ниже приводится для сравнения два способа решения одной и той же задачи.

Задача 3. *Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны b, а угол между ними равен* α. *Две боковые грани пирамиды, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны основанию, а третья грань наклонена к нему под углом* α. *Найти радиус сферы, вписанной в пирамиду.*

Решение. Первый способ. Пусть $SABC$ – данная пирамида, $AB = AC = b$, $\angle BAC = \alpha$ (рис. 4). Из условия задачи следует, что высота пирамиды равна SA. Проведем $AM \perp BC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $SM \perp BC$, и $\angle SMA = \alpha$.

Так как $\Delta ASB = \Delta ASC$ (по двум катетам), то $SC = SB$ и SM – биссектриса угла BSC; AM – биссектриса равнобедренного треугольника ABC. Поэтому плоскость ASM является биссекторной плоскостью двугранного угла при ребре SA. Так как плоскость SMA перпендикулярна BC, то она пересекает биссекторную плоскость двугранного угла при ребре BC по биссектрисе MN треугольника

SAM. Следовательно, центр вписанной в пирамиду сферы лежит на отрезке *MN* (теорема 1).

Обозначим центр сферы через *O* и проведем $OP \perp AM$; *OP* = *r*, где *r* – радиус вписанной сферы. Ортогональной проекцией вписанной в пирамиду сферы на плоскость основания является окружность радиуса *r*, касающаяся ребер *AB* и *AC*.

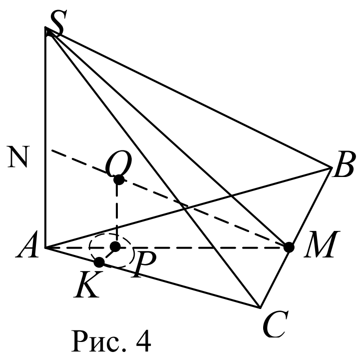

Рис. 4

Обозначим точку касания этой окружности с ребром *AC* через *K*. Тогда $PK \perp AC$, *PK* = *r*.

Теперь находим

$$AP = \frac{PK}{\sin\angle PAK} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad PM = OP \cdot ctg\angle OMP = r \cdot ctg\frac{\alpha}{2},$$

$$AM = AC \cdot \cos\angle MAC = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Так как *AM* = *AP* + *PM*, получаем уравнение

$$b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + r \cdot ctg\frac{\alpha}{2},$$

решая которое, находим

$$r = \frac{b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\frac{\alpha}{2}} = b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot tg\frac{\alpha}{4}.$$

Второй способ. Воспользуемся формулой (1). Для этого найдем объем *V* и полную поверхность *S* пирамиды.

Из прямоугольного треугольника *SAM* имеем:

$$SA = AM \cdot tg\alpha = b\cos(\alpha/2) \cdot tg\alpha.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC} \cdot SA = \frac{1}{6}b^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha.$$

Так как треугольник ABC является ортогональной проекцией треугольника BSC, то $S_{\Delta SBC} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{\cos\angle SMA} = \dfrac{b^2}{2} tg\alpha$,

$S_{\Delta ASC} = \dfrac{1}{2} AS \cdot AC = \dfrac{1}{2} b^2 \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha$. Следовательно,

$$S = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta SBC} + 2S_{\Delta ASC} = 2b^2 tg\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{4}$$

$$r = \frac{3V}{S} = \frac{b^3 \sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot tg\alpha}{4b^2 tg\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{4}} = \frac{b \cdot \sin\alpha}{4\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

Замечание. Ответ, полученный вторым способом, можно преобразовать к виду $r = b \cdot \cos\dfrac{\alpha}{2} \cdot tg\dfrac{\alpha}{4}$, расписав $\sin\alpha$ по формуле двойного угла.

При решении следующей задачи (задача 4), очевидно, удобнее воспользоваться формулой (1). Однако следует обратить внимание, что в условии отсутствует ограничение, как правило встречающееся в школьных учебниках геометрии, а именно не сказано, что вершина пирамиды проектируется *внутрь* треугольника, лежащего в ее основании. Поэтому прежде чем приступать к ее решению, полезно выполнить следующее упражнение:

Упражнение 4. Доказать, что если из условия задачи следует, что в треугольной пирамиде все боковые грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, либо, что вершина треугольной пирамиды равноудалена от сторон основания, то вершина пирамиды проектируется либо в центр окружности, вписанной в основание, либо в один из трех центров вневписанных окружностей основания.

Задача 4. *Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Все боковые грани пирамиды наклонены к* *плоскости основания под углом 60°. Вычислить радиус вписанного шара.*

Решение. Задача допускает четыре решения (упражнение 4).

Рассмотрим случай, когда вершина D пирамиды ABCD проектируется в центр O вневписанной окружности, касающейся стороны BC=13 треугольника ABC (рис. 5). Обозначим через r_a радиус этой окружности, через S_{ABC} площадь и через p – полупериметр треугольника ABC.

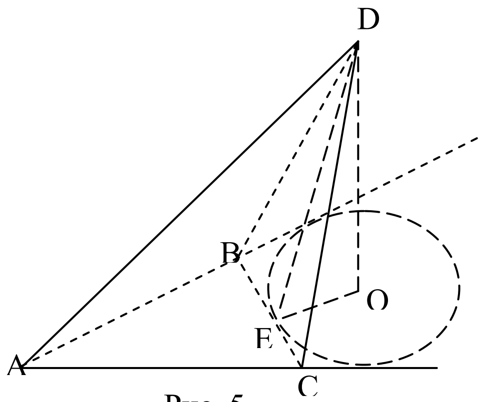

Рис. 5

Опустим перпендикуляр OE на сторону BC, OE = r_a , тогда по теореме о трех перпендикулярах DE$\perp$BC, $\angle DEO = 60^{\circ}$. По формуле Герона находим $S_{ABC} = 84$. Тогда $r_a = \frac{S_{ABC}}{p - BC} = \frac{84}{8} = 10{,}5$. Из прямоугольного треугольника DEC найдем высоту пирамиды: $DO = OE \cdot tg\angle DEO = r_a tg 60^{\circ} = 10{,}5\sqrt{3}$. Теперь можно вычислить объем пирамиды: $V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot DO = 294\sqrt{3}$.

Так как по условию задачи все грани наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом, то высоты всех боковых граней равны между собой (доказать!) и равны DE. Таким образом, площадь полной поверхности S пирамиды можно вычислить по формуле $S = S_{ABC} + DE \cdot p$. Получаем: $S = 84 + 21 \cdot 2 \cdot r_a = 525$. Вычислим, наконец, радиус r вписанного шара $r = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 294\sqrt{3}}{525} = \frac{294\sqrt{3}}{175}$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда BC=14 и 15. Получаем соответственно $\frac{12\sqrt{3}}{7}$ и $\frac{7\sqrt{3}}{4}$.

Если вершина пирамиды проектируется внутрь треугольника в центр вписанной окружности, то $r = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Призма и вписанная сфера

Приведем несколько фактов, которые полезно помнить при решении задач.

1. Если в призму вписана сфера, то высота призмы равна диаметру этой сферы.
2. Если призма прямая, ортогональной проекцией вписанной сферы на плоскость основания призмы будет окружность, вписанная в многоугольник – основание призмы. Для наклонной призмы этот факт не верен (см. задачу 6).
3. Центр сферы, вписанной в прямую призму, лежит на середине отрезка, соединяющего центры вписанных в основание окружностей (докажите).

Из второго утверждения, в частности, следует, что основанием описанного прямого параллелепипеда является ромб. Кроме того описанная прямая четырехугольная призма обладает свойством, аналогичным свойству описанного четырехугольника (см. задачу 1.10).

Отметим, что условия, при которых в многогранник можно вписать сферу являются ключевыми при решении соответствующего класса задач.

Задача 5. *Около сферы описана прямая призма, основанием которой служит ромб. Найти величину острого угла ромба, если большая диагональ призмы составляет с плоскостью основания угол* α.

Решение. Пусть дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$, причем $\angle C_1AC = \alpha$. Центр S вписанной в нее сферы лежит на середине отрезка OO_1, где O и O_1 – центры окружностей, вписанных в основания $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно (рис. 6).

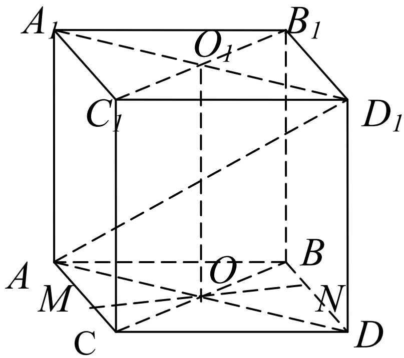

Рис. 6

Так как призма прямая, ортогональной проекцией вписанной сферы на плоскость основания призмы является окружность, вписанная в ромб $ABCD$. Обозначим через M и N точки касания этой окружности с ребрами AD и BC соответственно $\left(MN \perp BC, MN \perp AD\right)$, а через x диаметр сферы: $OO_1 = MN = CC_1 = x$.

Имеем: $AC = CC_1 \cdot ctg\angle CAC_1 = x \cdot ctg\alpha$, $OM = \dfrac{x}{2}$,

$OA = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{x}{2} ctg\alpha$. Следовательно, $\sin\angle OAM = {OM}/{OA} = tg\alpha$,

$$\angle BAD = 2 \cdot \angle OAM = 2 \cdot \arcsin(tg\alpha).$$

Последнее выражение имеет смысл, если $\left|tg\alpha\right| \le 1$. Так как по условию задачи $\angle BAD$ – острый, то $0 < tg\alpha < 1$, то есть $\alpha \in \left(0, \pi/4\right)$.

Таким образом, искомый угол равен $2 \cdot \arcsin(tg\alpha)$, где $\alpha \in \left(0, \pi/4\right)$.

Задача 6. *В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной, равной a. Ребро AA_1 перпендикулярно ребру BC и образует угол $60°$ с плоскостью основания ABC. Призма такова, что в неё можно вписать шар. Найти объем призмы.*

Решение. Проведем через центр вписанного в призму шара плоскость P перпендикулярную боковым ребрам призмы и обозначим через A_2, B_2, C_2 точки ее пересечения с прямыми AA_1, BB_1 и CC_1 соответственно. В плоскости P будут лежать все радиусы, соединяющие центр сферы и точки ее касания с гранями призмы (так как эти радиусы перпендикулярны ребрам призмы), поэтому линией пересечения сферы с плоскостью P является окружность, вписанная в треугольник $A_2B_2C_2$.

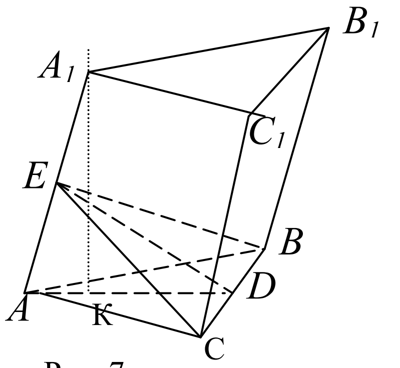

Рис. 7

Итак, для вычисления радиуса вписанного в призму шара достаточно найти радиус окружности, вписанной в треугольник $A_2B_2C_2$. Понятно, что вместо этого треугольника можно взять любой другой, полученный при пересечении призмы какой-нибудь плоскостью, параллельной плоскости P. Рассмотрим например плоскость CBE, проходящую через ребро BC перпендикулярно AA_1 (рис. 7).

Проведем в основании ABC призмы высоту AD и опустим на нее перпендикуляр из точки A_1. Так как ребро BC перпендикулярно прямым AD и AA_1, то оно перпендикулярно плоскости AA_1K и поэтому перпендикулярно A_1K. Отрезок A_1K, таким образом, перпендикулярен плоскости ABC, AK является проекцией AA_1 на плоскость основания в $\angle A_1AK = 60°$. Теперь можно легко найти элементы треугольника BCE:

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ ED = AD \cdot \sin 60° = \frac{3a}{4},$$

$$CE = BE = \sqrt{ED^2 + \left(\frac{BC}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}.$$

Вычислим площадь треугольника BCE. Если r – радиус вписанной в этот треугольник окружности, то

$$S_{\Delta BCE} = \frac{1}{2} r \cdot \left(BC + CE + BE\right) = \frac{ar}{4}\left(2 + \sqrt{13}\right).$$

С другой стороны, $S_{\Delta BCE}=\frac{1}{2}BC\cdot ED=\frac{3a^2}{8}$. Приравнивая найденные значения площади, получаем $r=a\left(\sqrt{13}-2\right)/6$.

Высота призмы равна, очевидно, 2 r. Поэтому

$$V=S_{\Delta ABC}\cdot 2r=BC\cdot AD\cdot r=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{13}-2\right)}{12}\cdot a^3.$$

Замечание. В задаче возможен другой вариант чертежа, когда плоскость CBE пересекает не ребро AA_1, а его продолжение. В этом случае вместо плоскости CBE надо рассмотреть другую плоскость, проходящую через ребро B_1C_1 и перпендикулярную A_1A_1.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. В правильную четырехугольную пирамиду вписана сфера, центр которой делит высоту пирамиды в отношении 5:3, считая от вершины. Найти площадь сферы, если стороны основания пирамиды равны 18. (*Ответ:* 81π).

1.2. В пирамиду $PABCD$ вписан шар. Основанием пирамиды является равнобочная трапеция $ABCD$ с боковой стороной AB = 1 и острым углом φ, а боковые грани PAD и PBC – равнобедренные треугольники, образующие с основанием пирамиды один и тот же угол α. Найти радиус вписанного шара. (*Ответ:* $0{,}5l\cdot\sin\varphi\cdot tg\frac{\alpha}{2}$).

1.3. Найти площадь сферы, вписанной в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см. (*Ответ:* $64\pi/9$).

1.4. Радиус сферы, вписанной в правильную четырехугольную пирамиду, равен r. Двугранный угол, образованный двумя соседними боковыми гранями этой пирамиды, равен α. Вычислить объем пирамиды, имеющей вершину в центре сферы, а вершины основания – в четырех точках касания сферы с боковыми гранями данной пирамиды. $\left(Ответ: \frac{4}{3} r^3 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sqrt{-\cos^2 \alpha} \right)$

1.5. Определить объем шара, вписанного в правильную пирамиду, у которой высота равна h, а двугранный угол при основании равен $60°$. (*Ответ:* $4\pi h^3 / 81$).

1.6. Угол между плоскостями основания и боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен β, площадь вписанной в пирамиду сферы равна S. Найти площадь боковой поверхности пирамиды. $\left(Ответ: \frac{S \cdot ctg^2(\beta/2)}{\pi \cdot \cos\beta} \right)$.

1.7. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Определить отношение объемов частей пирамиды, на которые её рассекает касательная к шару плоскость, проведенная параллельно основанию $\left(Ответ: .tg^2 \frac{\alpha}{2} \right)$

1.8. В правильной четырехугольной пирамиде угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α. Радиус вписанной в пирамиду сферы равен r. Найти площадь сечения пирамиды, проходящего через центр вписанного шара параллельно основанию пирамиды. (*Ответ:* $4r^2 / \sin^2 \alpha$).

1.9. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды имеют одну длину α. Через середины боковых ребер, принадлежащих одной из боковых граней, проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найти площадь получившегося сечения. (*Ответ:* $a^2(6-\sqrt{3})/16$).

1.10. Доказать, что если в прямую четырехугольную призму можно вписать шар, то суммы площадей её противоположных граней попарно равны между собой.

1.11. Доказать, что если в прямую призму можно вписать шар, то площадь полной поверхности призмы в шесть раз больше площади его основания.

1.12. Около сферы радиуса R описана правильная шестиугольная призма, определить её полную поверхность.

($Ответ$: $S = 12R^2\sqrt{3}$).

1.13. В правильную треугольную призму вписана сфера. Найти отношение площади сферы к площади полной поверхности призмы. $\left(Ответ: \dfrac{2\pi}{9\sqrt{3}}\right)$.

1.14. Нижним основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит ромб с острым углом α. Известно, что в эту призму можно вписать шар диаметром d. Определить площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через ребра BC и A_1D_1. ($Ответ$: $d^2\sqrt{2}/\sin\alpha$).

1.15. В прямую призму $ABCDA_1B_1C_1D_1$, нижним основанием которой является ромб $ABCD$, вписан шар радиуса r. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершины A, B, C_1, если известно, что $\angle BAD = \alpha$.
($Ответ$: $4\sqrt{2}r^2/\sin\alpha$).

1.16. Около шара описана правильная четырехугольная усеченная пирамида, у которой стороны основания относятся как $m : n$. Определить отношение объемов пирамиды и шара. $\left(Ответ: \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{m^2+mn+n^2}{mn}\right)$.

1.17. Пирамида $SABCD$ и S_1ABCD имеют общее основание $ABCD$, представляющее собой ромб со стороной α и острым углом, равным $60°$. Вершины S и S_1 лежат по разные стороны от плоскости $ABCD$, причем боковые грани одной из пирамид образуют угол в $30°$ с основанием, другой – угол в $60°$. Найти радиус шара, лежащего внутри многогранника $SABCDS_1$ и касающегося всех его граней. ($Ответ$: $a(3-\sqrt{3})/4$).

II Описанная сфера

Сфера называется *описанной* около выпуклого многогранника, если все вершины многогранника лежат на сфере.

Таким образом, *центр* описанной сферы – точка равноудаленная от всех вершин многогранника. Отметим, что если из центра описанной сферы опустить перпендикуляр на какую-либо грань многогранника, то основанием этого перпендикуляра будет центр окружности, описанной около этой грани.

Теорема 2. *Если около выпуклого многогранника описана сфера, то ее центр является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер многогранника, перпендикулярно этим ребрам. Обратно, если все плоскости, проведенные через середины ребер выпуклого многогранника перпендикулярно этим ребрам, пересекаются в одной точке, то вокруг многогранника можно описать сферу.*

Пирамида и описанная сфера

С помощью теоремы 2 можно доказать следующие утверждения:

1. Вокруг пирамиды можно описать сферу, если можно описать окружность около многоугольника, лежащего в основании пирамиды.
2. Вокруг любой треугольной пирамиды можно описать сферу.
3. Вокруг правильной n-угольной пирамиды можно описать сферу.
4. Центр сферы, описанной около правильной пирамиды, лежит на её высоте или на продолжении высоты за плоскость основания.

При построении чертежа следует учитывать, что центр сферы может лежать и внутри, и вне, и на поверхности пирамиды. В любом случае, если высота вписанной пирамиды h проходит через центр окружности радиуса R_1 описанной около основания, то радиус R описанной около этой пирамиды сферы можно вычислить по формуле

$$R = \frac{R_1^2 + h^2}{2h}. \tag{3}$$

Действительно, продолжим высоту пирамиды до пересечения со сферой в точке S_1 (рис. 8). Из прямоугольного треугольника SAS_1 ($\angle SAS_1 = 90°$, так как опирается на диаметр) имеем:

$$AO^2 = SO \cdot OS_1, \text{ где } SO = h,\ OS_1 = SS_1 - SO = 2R - h.$$

С учетом указанных соотношений получаем уравнение $R_1^2 = h(2R-h)$, решая которое относительно R получаем формулу (3).

Отметим, что запоминать формулу (3) нецелесообразно. В дальнейшем при решении задач мы будем, как правило, повторять рассуждения, приведенные при доказательстве этой формулы.

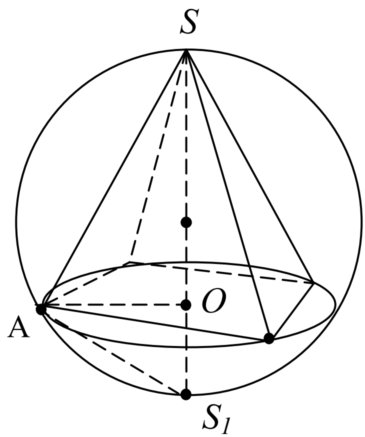

Рис. 8

Задача 7. *Радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, относится к стороне основания пирамиды как 3:4. Найти величину угла между плоскостью основания и боковой гранью пирамиды.*

Решение. Первый способ. Пусть дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$, SO – её высота. Обозначим через O_1 центр сферы, описанной около этой пирамиды. Тогда точка O_1 лежит либо на высоте SO, либо на продолжении высоты за плоскость основания. В любом случае радиус сферы равен SO_1. Обозначим SO_1 = R, $AB = BC = CD = DA = a$, $SO = h$. Из условия задачи следует, что $R = 3\,a/4$.

Продолжим высоту SO до пересечения со сферой в точке S_1 (рис. 9). Из прямоугольного треугольника SAS_1 имеем:

$$AO^2 = SO \cdot OS_1,$$ где

$$AO = a\sqrt{2}/2, \; SO = h,$$

$$OS_1 = 2R - H.$$

Следовательно, $a^2 = 2h\left(2R-h\right)$. Учитывая, что

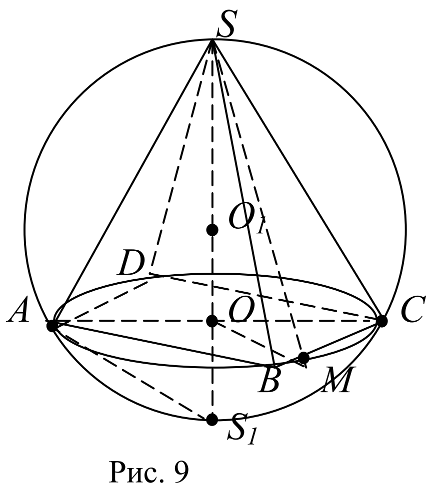

Рис. 9

$R = 3a/4$, имеем уравнение $2h^2 - 3ah + a^2 = 0$, решая которое относительно h, получаем, что, либо $h = a$, либо $h = 0{,}5a$.

Пусть SM – апофема грани SBC. Тогда угол между гранью SBC и плоскостью основания равен углу SMO. Из треугольника SMO имеем:

$$tg\angle SMO = \frac{SO}{OM}, \text{ где } OM = \frac{a}{2}.$$

Если $SO = h = a$, то $tg\angle SMO = 2$. Если $SO = h = 0{,}5\ a,$ то $tg\angle SMO = 1$. Таким образом, получаем два возможных значения искомого угла: $arctg 2$ и $\pi/4$.

Второй способ. Используем введенные выше обозначения. Рассмотрим сечение сферы и пирамиды плоскостью, проходящей через вершины A, S и C (рис. 9). Так как треугольник ASC вписан в окружность радиуса R, то $R = \dfrac{AS \cdot SC \cdot AC}{4S_{\Delta ASC}}$, где

$$R = \frac{3a}{4}, \qquad AC = a\sqrt{2}, \qquad AS = SC = \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}},$$

$$S_{\Delta ASC} = \frac{1}{2} AC \cdot SO = \frac{ah\sqrt{2}}{2}.$$

Получаем уравнение $2h^2 - 3ah + a^2 = 0$, решая которое относительно h, заключаем, что, либо $h = a$, либо $h = 0{,}5\ a$.

Таким образом, как и в первом случае, получаем два возможных значения искомого угла:
$arctg 2$ и $\pi/4$.

Задача 8. *Угол между высотой и боковым ребром правильной треугольной пирамиды равен α. В каком отношении делит высоту центр описанной сферы?*

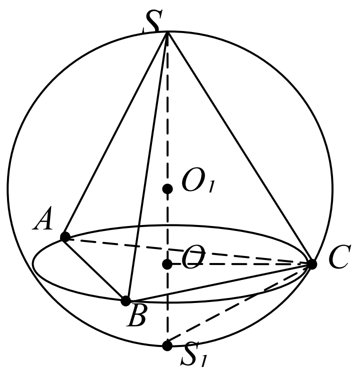

Рис.10

Решение. Пусть $SABC$ – данная пирамида, SO – её высота, тогда $\angle OSC = \angle OSB = \angle OSA = \alpha$.

Замечание. Задача имеет смысл, если центр описанной сферы лежит внутри пирамиды на её высоте. Расположение центра описанной сферы относительно пирамиды зависит от угла α.

Если $\alpha = \pi / 4$, то $SO = OA = OB = OC$ и, следовательно, O – центр сферы и её радиус равен высоте пирамиды. Задача в этом случае не имеет смысла.

Если $\pi / 4 < \alpha < \pi / 2$, то очевидно, что центр сферы лежит на продолжении высоты пирамиды за плоскость основания, то есть вне пирамиды, и задача также не имеет смысла.

Пусть $0 < \alpha < \pi / 4$. Тогда центр сферы O_1 лежит на высоте внутри пирамиды (рис. 10). Обозначим $SO = h$, $SO_1 = R$. Продолжим высоту пирамиды до пересечения со сферой в точке S_1. Из прямоугольного треугольника SCS_1 имеем $CO^2 = SO \cdot OS_1$, где $CO = h \cdot tg\alpha$, $OS_1 = 2R_1 - h$. Следовательно, $h^2 tg^2\alpha = h(2R - h)$. Отсюда $R = \dfrac{h \cdot tg^2\alpha + h}{2} = \dfrac{h}{2\cos^2\alpha}$. Таким образом,

$$\frac{OO_1}{O_1S} = \frac{SO - SO_1}{SO_1} = \frac{h}{R} - 1 = \cos 2\alpha .$$

То есть центр описанной сферы делит высоту пирамиды в соотношении $\cos 2\alpha$: 1, считая от основания пирамиды, где $\alpha \in (0, \pi / 4)$.

Задача 9. *Пусть R – радиус сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, r – радиус сферы, вписанной в эту пирамиду. Доказать, что* $\dfrac{R}{r} \geq \sqrt{2} + 1$.

Решение. Пусть $SABCD$ – данная пирамида, SO – её высота. Обозначим через $O_1 \in SO$ центр вписанной в пирамиду сферы (рис.11).

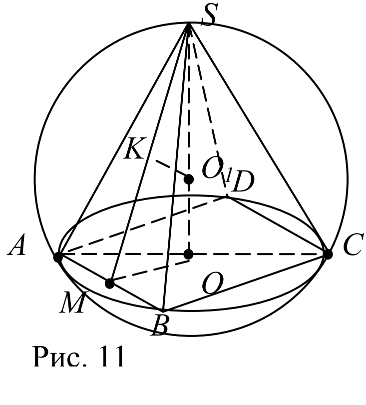

Рис. 11

Проведем $SM \perp AB$, $O_1K \perp SM$. Тогда O_1K = O_1O = r. Пусть $\angle SMO = \alpha$, AB = BC = CD = DA = a. Из прямоугольного треугольника O_1MO имеем: $r = O_1O = MO \cdot tg\angle OMO_1 = \dfrac{a}{2} \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}$.

Используя далее формулу (3), получаем: $R = \dfrac{OD^2 + SO^2}{2 \cdot SO}$, где $DO = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$, $SO = OM \cdot tg\alpha = \dfrac{a \cdot tg\alpha}{2}$. Следовательно, $R = \dfrac{a\left(2 + tg^2\alpha\right)}{4 \cdot tg\alpha}$.

Таким образом, требуется доказать неравенство

$$\frac{R}{r} = \frac{2 + tg^2\alpha}{2 \cdot tg\alpha \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}} \geq \sqrt{2} + 1. \qquad (4)$$

Обозначим $tg\dfrac{\alpha}{2} = i$, где $0 < i < 1$, поскольку $0 < \dfrac{\alpha}{2} < 45°$.

Тогда $tg\alpha = \dfrac{2 \cdot tg\dfrac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2t}{1 - t^2}$, и неравенство (4) имеет вид:

$$\frac{1 + t^4}{2 \cdot (1 - t^2) \cdot t^2} \geq \sqrt{2} + 1. \qquad (5)$$

Так как при $0 < t < 1$ имеем $2\left(1 - t^2\right) \cdot t^2 > 0$, то неравенство (5) равносильно неравенству $1 + t^4 \geq 2\left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(1 - t^2\right) \cdot t^2$ или

$$\left(2\sqrt{2} + 3\right) \cdot t^4 - 2\left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot t \ + 1 \geq 0. \qquad (6)$$

Так как $2\sqrt{2} + 3 = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2$, то неравенство (6) равносильно верному неравенству

$$\left(\left(\sqrt{2} + 1\right) \cdot t^2 - 1\right)^2 \geq 0.$$

Все проводимые преобразования являются равносильными, поэтому из справедливости последнего неравенства следует справедливость неравенства (4).

Замечание. Очевидно, что не во всех случаях центр описанной вокруг пирамиды сферы лежит на ее высоте. Как правило, определение положения центра, выполнение чертежа и обоснование построения вызывают особые трудности. Их можно избежать, если решать задачу *методом координат*.

Приведем для сравнения два способа решения следующей задачи.

Задача 10. *В основании треугольной пирамиды, высота которой равна h, лежит прямоугольный треугольник с катетом равным a и острым углом* α*, прилежащим к этому катету. Вершина пирамиды проектируется в вершину прямого угла этого треугольника. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.*

Решение. Первый способ. Пусть $SABC$ – данная пирамида (рис.12), $\angle BCA = 90°$, $\angle CBA = \alpha$, $SC = h$, $CB = a$. Через середину M гипотенузы AB проведем прямую MN перпендикулярно плоскости ABC (следовательно, параллельно SC), и через середину K высоты SC прямую KO параллельно MC (следовательно, перпендикулярно SC). Точка O пересечения прямых MN и KO является центром описанной около пирамиды сферы.

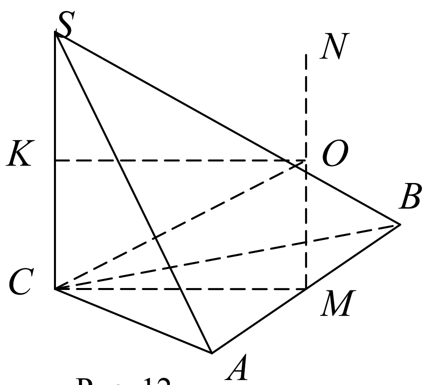

Рис. 12

Действительно, точка O равноудалена от вершин A, B, C основания, так как лежит на перпендикуляре, проходящем через центр окружности, описанной около треугольника ABC и равноудалена от точек S и C, так как лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CS.

Обозначим радиус сферы через R, тогда $CO = R$. Из прямоугольного треугольника ABC имеем:

$AB = a/\cos\alpha$. Из прямоугольного треугольника CMO имеем: $CO^2 = CM^2 + OM^2$, где $CM = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$, $OM = \dfrac{h}{2}$. Следовательно,

$$R = \sqrt{\frac{a^2}{4\cos^2\alpha} + \frac{h^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + h^2\cos^2\alpha}}{2\cos\alpha}. \qquad (7)$$

Второй способ. Пусть $SABC$ – данная пирамида, $\angle BCA = 90°$, $\angle CBA = \alpha$, $SC = h$, $CB = a$. Введем прямоугольный базис $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ с началом в вершине C, как показано на рисунке 13, и определим координаты вершин пирамиды в этом базисе $C(0,0,0)$, $S(0,0,h)$, $A(a\cdot tg\alpha,0,0)$, $B(0,a,0)$.

Пусть $O(x,y,z)$ – центр сферы, описанной около пирамиды. Тогда

$$\vec{OC}^{\,2} = \vec{OS}^{\,2} = \vec{OB}^{\,2} = R^2,$$

где через R обозначен радиус сферы. Записывая эти равенства в координатной форме, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 + (z-h)^2 = R^2, \\ (x - atg\alpha)^2 + y^2 + x^2 = R^2, \\ x^2 + (y-a)^2 + x^2 = R^2. \end{cases}$$

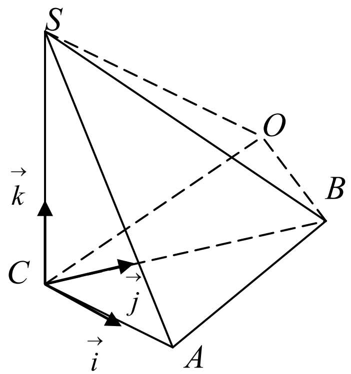

Рис. 13

Раскрывая скобки и вычитая из первого уравнения системы соответственно второе, третье и четвёртое, получаем равносильные системы:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ 2hz - h^2 = 0, \\ 2atg\alpha\cdot x - a^2tg^2\alpha = 0, \\ 2ay - a = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R, \\ z = h/2, \\ x = atg\alpha/2, \\ y = a/2. \end{cases}$$

Отсюда

$$R = \frac{\sqrt{a^2 tg^2\alpha + a^2 + h^2}}{2}$$

Используя формулу $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$, полученное выражение можно преобразовать к виду (7).

Призма и описанная сфера

Определим условия, при которых призма является вписанной.

Каждая грань вписанного многоугольника вписана в окружность по которой пересекается сфера с плоскостью грани. Так как боковые грани призмы – параллелограммы, а из всех параллелограммов только прямоугольник можно вписать в окружность, то призма – прямая. Таким образом, *если вокруг призмы можно описать сферу, то призма является прямой, и в ее основании лежит вписанный многоугольник.*

`Упражнение 5.` Доказать, что центр описанной около призмы сферы лежит на середине отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

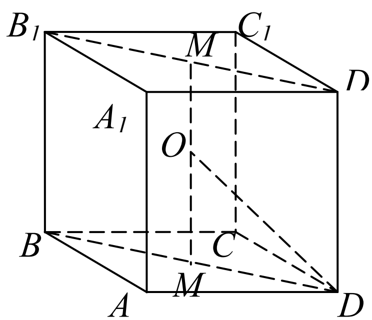

Рис. 14

`Задача 11.` *В сферу, радиуса R вписана четырехугольная призма, в основании которой лежит квадрат. Высота призмы h. Найти сторону основания призмы.*

`Решение.` Так как по условию задачи призма вписана в сферу, то она является прямой. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – данная призма. M и M_1 – центры оснований (рис. 14). Обозначим через центр O центр описанной сферы, $O \in MM_1$, $MO = OM_1$.

В прямоугольном треугольнике OMD стороны $MO = h/2$, $OD = R$.

Следовательно, $MD = \sqrt{R^2 - \frac{h^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - h^2}$.

Из треугольника ABD имеем $AD = \frac{BD}{\sqrt{2}}$, где $BD = 2 \cdot MD = \sqrt{4R^2 - h^2}$. Таким образом, $AD = \sqrt{\frac{4R^2 - h^2}{2}}$.

Замечание. Отметим, что задача имеет смысл, если $4R^2 - h^2 > 0$, то есть если $h < 2R$.

Задачи для самостоятельного решения.

2.1. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной около её основания, равен r. (*Ответ:* $2r^2(R \pm \sqrt{R^2 - r^2}) : 3$).

2.2. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, основание которой делит перпендикулярный ему радиус пополам. Определить площадь сферы, вписанной в пирамиду.
(*Ответ:* $\pi R^2 (4 - \sqrt{7}) / 2$, или $\pi R^2 \cdot (12 - 3\sqrt{15}) / 2$).

2.3. В правильной треугольной пирамиде отношение длины бокового ребра к длине ребра основания равно ρ. Указать все значения ρ, при которых центр описанной сферы пирамиды будет находиться внутри пирамиды.
(*Ответ:* $\rho > \sqrt{\frac{2}{3}}$).

2.4. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная пирамида. Каков наибольший возможный объем этой пирамиды? (*Ответ:* $8\sqrt{3}R^3 / 27$).

2.5. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер пирамиды также равно a, а два других равны b. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

($Ответ:$ $0{,}5a^2(4b^2-a^2)^{\frac{1}{2}}(4a^2b^2-a^4-b^4)^{-\frac{1}{2}}$).

2.6. Определить двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанной сферы в 2,5 раза больше радиуса вписанной сферы.

($Ответ:$ $2\cdot arctg\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ или $\dfrac{\pi}{3}$).

2.7. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что перпендикуляр, опущенный из центра описанной около пирамиды сферы на её боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α, и объем ограниченного сферой шара равен V.

$$\left(Ответ: \frac{1}{1+2\cdot ctg^2\alpha}\cdot\left(\frac{6V}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\right).$$

2.8. Около сферы описана правильная треугольная призма, а около нее описана новая сфера. Найти отношение площадей этих сфер. ($Ответ:$ 5 : 1).

2.9. Около правильной треугольной призмы, высота которой вдвое больше стороны основания, описана сфера. Найти отношение объема ограниченного этой сферой шара к объему призмы. ($Ответ:$ $64\pi/27$).

2.10. В сферу радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с меньшей боковой гранью угол α. Диагональ основания параллелепипеда образует с большей стороной основания угол β. Определить площадь боковой поверхности параллелепипеда.

$$\left(Ответ: \frac{8\sqrt{2}R^2\cdot\sin\alpha\cdot\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\beta\right)}{\cos^2\beta}\cdot\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}\right).$$

2.11. В сферу радиуса R вписана правильная треугольная призма со стороной основания равной a. Найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через центр сферы и сторону основания призмы. (*Ответ:* $\frac{2a}{3}\sqrt{4R^2 - a^2}$).

III Другие комбинации сферы и многогранников

Положение сферы (шара) относительно многогранника может определяться различными элементами. Сфера может касаться ребер или граней многогранника, проходить через какие-либо точки принадлежащие ребрам граням многогранника. Как и в случае вписанной и описанной сферы основным вопросом, как правило, является вопрос о положении центра сферы. В некоторых случаях избежать трудностей при построении чертежа помогает метод координат.

Ниже приводятся примеры решения некоторых задач на различные комбинации сферы и многогранников

Задача 12. *В основании треугольной пирамиды SABC лежит правильный треугольник ABC со стороной длины 1. Ребро SC пирамиды перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Центр сферы, касающейся ребер SA, AB и AC , лежит в плоскости SBC. Найти радиус сферы.*

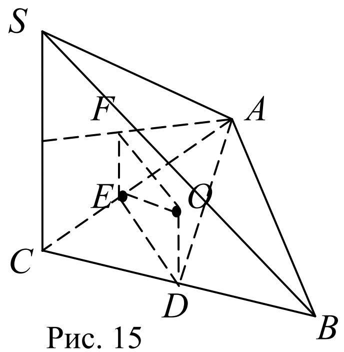

Рис. 15

Решение. Пусть O – центр сферы, $O \in$ пл. SBC. Так как точка O равноудалена от ребер AB и AC, то ее проекция на основание пирамиды лежит на биссектрисе угла CAB, следовательно, совпадает с серединой D ребра CB (рис.15). Так как точка O равноудалена от ребер SA и AC, то её проекция F на грань SAC лежит на биссектрисе угла SAC, равного $45°$.

Проведем $DE \perp CA$. Четырехугольник $FEDO$ является прямоугольником, а его диагональ OE равна искомому радиусу (докажите).

Из прямоугольного треугольника ADE имеем: $DE = AD \cdot \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ $AE = AD \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{3}{4}$. Из прямоугольного треугольника AFE: $EF = AE \cdot tg\frac{\pi}{8} = \frac{3}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Наконец, из прямоугольного треугольника DOE:

$$OE = \sqrt{DE^2 + OD^2} = \frac{1}{4}\sqrt{30 - 18\sqrt{2}}.$$

Задача 13. *Внутри куба с ребром а расположены два равных, касающихся между собой шара. При этом один шар касается трех граней куба, имеющих общую вершину, а другой касается трех оставшихся граней куба. Найдите радиусы этих шаров.*

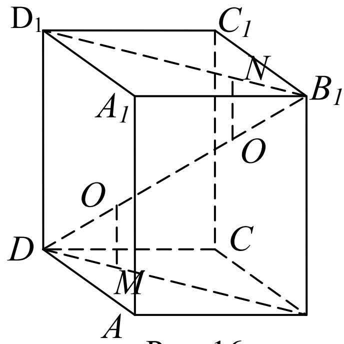

Рис. 16

Решение. Пусть дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Предположим, что первый шар касается граней $ABCD$, DCC_1D_1 и ADD_1A_1, тогда его центр лежит на пересечении биссекторных плоскостей DCB_1A_1 и ADC_1B_1 двугранных углов при ребрах DC и AD соответственно, то есть на диагонали B_1D куба. Так как плоскости DCB_1A_1 и ADC_1B_1 являются также биссекторными плоскостями двугранных углов при ребрах A_1B_1 и B_1C_1, то центр второго шара, касающегося граней $A_1B_1C_1D$, AA_1B_1B и BB_1C_1C, также лежит на диагонали B_1D. Пусть O_1 и O_2 – центры данных шаров, M и N – точки их касания с гранями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно (рис. 16). Тогда $O_1O_2 = 2r$, $O_2N = O_1M = r$, где через r обозначен радиус шаров.

Из подобия треугольников BB_1D и O_1MD, следует что $O_1D = \frac{B_1D \cdot MO_1}{BB_1}$, где $B_1D = a\sqrt{3}$, $BB_1 = a$, $MO_1 = r$. То есть $O_1D = O_2B_1 = r\sqrt{3}$.

Так как $B_1D = B_1O_2 + O_1O_2 + O_1D$, то получим уравнение $a\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} + 2r$, решая которое находим:

$$r = \frac{3-\sqrt{3}}{4} \cdot a\ .$$

Задача 14. *Сфера касается бокового ребра AA_1 и непараллельных ребер основания AB, A_1D_1 единичного куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и проходит через точку $M \in CC_1$, причем $CM = 1/3$. Найдите радиус сферы.*

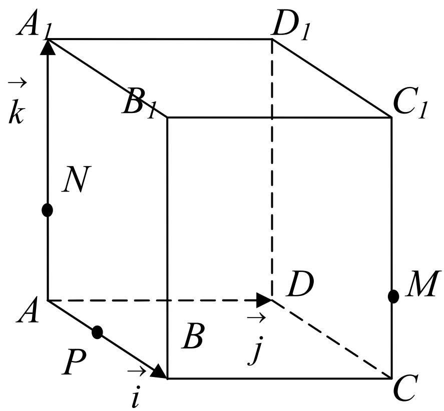

Рис. 17

Решение. Пусть сфера касается ребра AA_1 в точке N, ребра AB – в точке P, ребра A_1D_1 – в точке K (рис. 17). Тогда $A_1K = A_1$ N, $AN = AP$ как отрезки касательных, проведенных к сфере из одной точки.

Пусть $AN = x$. Тогда $A_1K = A_1N = 1–x$, так как $AA_1 = A_1D_1 = 1$.

Введем прямоугольный базис $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ с началом в вершине A куба, как показано на рисунке 17 и определим координаты точек M, N, P, K в этом базисе. Имеем: $N(0,0,x)$; $P(x,0,0)$; K $(0,1–x,1)$; $M(1,1,1/3)$.

Пусть $O(x_0, y_0, z_0)$–центр данной сферы. Тогда $\vec{OP} \perp \vec{AB}$, $\vec{ON} \perp \vec{AA_1}$, $\vec{OK} \perp \vec{A_1D_1}$. Так как $\vec{A_1D_1} \parallel \vec{AD}$, то $\vec{OK} \perp \vec{AD}$. Таким образом $\vec{ON} \cdot \vec{AA_1} = 0$; $\vec{OK} \cdot \vec{A_1D_1} = 0$; $\vec{OK} \cdot \vec{AD} = 0$. Отсюда $z_0 = x$, $y_0 = 1 - x$, $x_0 = x$, то есть $O(x, 1 - x, x)$.

Так как $OK^2 = ON^2 = OP^2 = OM^2 = R^2$, где R – радиус сферы, то получаем систему:

$$\begin{cases} x^2 + (x-1)^2 = R^2; \\ (x-1)^2 + x^2 + \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = R^2, \end{cases}$$

решая которую, находим $R = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Задачи для самостоятельного решения.

3.1. В полушар радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на сферической поверхности. Вычислить объем куба. $\left(\mathit{Ответ}: \ \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}} \cdot R^3 \right)$.

3.2. Шар касается четырех ребер куба, прилежащих к одной его грани, и касается грани, противоположной указанной. Найти отношение объема куба к объему этого шара. $\left(\mathit{Ответ}: \ \dfrac{384}{125\pi} \right)$.

3.3. Сфера проходит через вершины одной грани куба и касается сторон противоположной грани куба. Найти отношение объемов шара и куба. $\left(\mathit{Ответ}: \ \dfrac{41\pi\sqrt{41}}{384} \right)$.

3.4. Площадь боковой поверхности пирамиды равна S, а объем равен V. Известно, что существует шар с центром на основании пирамиды, касающийся всех боковых граней. Найти радиус этого шара. $\left(\mathit{Ответ}: \ \dfrac{3V}{S} \right)$.

3.5. Сфера касается боковых ребер правильной шестиугольной призмы, основание которой лежит вне сферы. Найти отношение площади боковой поверхности призмы, заключенной внутри сферы к площади боковой поверхности призмы, лежащей вне сферы. $\left(\mathit{Ответ}: \ \dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \right)$.

3.6. Шар касается одной грани куба с ребром $2a$ и всех ребер противоположной грани. Найти объем общей части шара и куба. $\left(\textit{Ответ}: \ \dfrac{49\pi \cdot a^3}{24} \right)$.

3.7. Как относятся между собой поверхности трех шаров, если первая поверхность касается граней куба, вторая касается его ребер, третья проходит через его вершины. $\left(\textit{Ответ}: \ 1:2:3 \right)$.

3.8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E – середина ребра C_1D_1, точка F – середина ребра B_1C_1. Найти радиус сферы, проходящей через точки E, F, A, C, если ребро куба равно a. $\left(\textit{Ответ}: \ \sqrt{41}\, a/8 \right)$.

3.9. Ребро куба равно a; AB – его диагональ. Найти радиус сферы, касающейся трех граней, сходящихся в вершине A, и трех ребер, выходящих из вершины B. Найти также часть поверхности этой сферы, которая лежит вне куба. $\left(\textit{Ответ}: \ a \cdot \left(2 - \sqrt{2}\right); \ 6\pi a^2 \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right) \right)$.

3.10. Найти величину радиуса шара, касающегося основания и боковых ребер правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен 2β. $\left(\textit{Ответ}: \ \dfrac{a\sqrt{\cos 2\beta}}{2\sin\beta + \sqrt{2}} \right)$.

3.11. Правильный тетраэдр помещен внутрь шара радиуса r так, что три его вершины лежат на поверхности шара, а центр шара находится внутри тетраэдра на расстоянии d от его четвертой вершины. Найти сторону тетраэдра. $\left(\textit{Ответ}: \ d\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{r^2 - \dfrac{d^2}{3}}, \ \ r > \dfrac{d}{\sqrt{3}} \right)$.

3.12. Шар касается всех ребер правильной четырехугольной пирамиды. Определить радиус шара, если двугранный угол при основании пирамиды равен $\pi/3$ и длина стороны основания равна a. $\left(\textit{Ответ}: \ \dfrac{a\sqrt{6}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6} \right)$.

3.13. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания a и боковым ребром b. Первая сфера с центром в точке O_1 касается плоскостей SAD и SBC в точках A и B, а вторая сфера с центром в точке O_2 касается плоскостей SAB и SCD в точках B и C. Найти объем пирамиды ABO_1O_2. $\left(\textit{Ответ}: \ \dfrac{a^4}{24\sqrt{4b^2-2a^2}}, \ b > \dfrac{a}{\sqrt{2}} \right)$.

3.14. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб $ABCD$ со стороной 3 и острым углом B, равным $60°$. Высота призмы равна 3/2. Центр сферы радиуса 3 находится на вершине C_1. Найти длину линии пересечения сферы с основанием $ABCD$. $\left(\textit{Ответ}: \ \pi\sqrt{3} \right)$.

3.15. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = a$, $AC = 2a$. Высота призмы равна $a/2$. Найти радиус шара, касающегося ребра B_1C_1 и граней AA_1B_1B, AA_1C_1C, ABC. $\left(\textit{Ответ}: \ 7a/18 \right)$.

3.16. В основании треугольной призмы лежит правильный треугольник ABC со стороной равной a. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны прямой BC и образуют угол $60°$ с плоскостью основания. Известно, что существует сфера, которая касается всех боковых ребер и ребер A_1C_1, A_1B_1, BC. Найти объем призмы. $\left(\textit{Ответ}: \ 3a^3\left(8 \pm \sqrt{3}\right)/64 \right)$.

3.17. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ является правильный треугольник ABC со стороной длины 2. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания, длина SA равна 3. На продолжениях ребер AB и SB выбраны соответственно точки M и N так, что B лежит на отрезке AM и на отрезке SN. Шар касается граней трехгранного угла с ребрами BC, BM, BN и плоскости SAC. Найти радиус шара. $\left(Ответ: \ \left(2+\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{3} \right)$.

3.18. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с равными катетами AB и AC. Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Точка M – середина BC; $SM = 2\cdot AM = 2$. Точка K лежит на отрезке SM; $SM = 4\cdot SK$. Найти радиус шара, касающегося граней трехгранного угла с ребрами AS, AB, AC и плоскости, проведенной параллельно прямой BC через точку K и середину ребра AS. $\left(Ответ:. \ 0{,}5\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \right)$.

3.19. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, все ребра которой равны 1, лежит квадрат $ABCD$. Точки M и N – середины SA и SC соответственно; точка K лежит на диагонали AC основания, причем $4\cdot CK = AC$. Найти радиус шара, касающегося лучей AD, AB, NM и NK. $\left(Ответ: \ \left(5\sqrt{2}-2\sqrt{7}\right)/4 \right)$.

3.20. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Сфера касается ребер AS, AC, AB и проходит через середину BC. Найти радиус сферы, если известно, что ее центр лежит внутри тетраэдра. $\left(Ответ: \ \sqrt{2}/4 \right)$.

3.21. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной длины 1. Ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, его длина равна 1. Определить радиус сферы, касающейся плоскости основания и боковых ребер SA, SB, SC. $\left(Ответ: \ \dfrac{2}{2+\sqrt{3}+\sqrt{6}} \right)$.

3.22. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром 1. Шар, радиуса $\dfrac{3}{2\sqrt{6}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар, радиуса $\dfrac{1}{2\sqrt{6}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной B, ребрами которого являются продолжения отрезков AB, CB, DB за вершину B. Определить расстояние между центрами шаров. $\left(\mathit{Ответ}: \ \sqrt{2}\right)$.

3.23. В основании пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, боковые грани пирамиды образуют угол в $60°$ с плоскостью основания. Шар радиуса $\dfrac{1}{4\sqrt{3}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной A. Другой шар, радиуса $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ касается граней трехгранного угла с вершиной B. Определить расстояние между центрами шаров. $\left(\mathit{Ответ}: \ 1/\sqrt{3}\right)$.

3.24. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Две сферы одинакового радиуса касаются друг друга, причем центр первой сферы совпадает с вершиной D, а центр второй сферы расположен внутри куба и она касается ребер трехгранного угла с вершиной A_1. Определить радиус сфер. $\left(\mathit{Ответ}: \ 0{,}4\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)\right)$.

3.25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, лежащая внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной A_1. Определить радиус второй сферы. $\left(\mathit{Ответ}: \ 1-1/\sqrt{2}\right)$.

3.26. В основании правильной треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC со стороной $3\sqrt{3}$, высота SH пирамиды равна 2. Сфера, центр которой лежит внутри пирамиды, касается граней ABC, SAB, SAC, и высоты SH. Найти радиус сферы. $\left(\mathit{Ответ}: 3/5\right)$.

3.27. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат *ABCD* со стороной 1, высота *SH* пирамиды равна $2\sqrt{3}$. Сфера, центр которой лежит внутри пирамиды, касается граней *ABCD*, *SCB*, *SCD*, и ребра *SA*. Найти радиус сферы. $\left(\textit{Ответ}: \ 2\sqrt{3}/7 \right)$.

3.28. В основании четырехугольной призмы лежит ромб *ABCD* со стороной 5 и диагональю $AC = 8$. Сфера касается ребер AA_1, BB_1, CC_1 призмы и плоскости *ABCD* в точке *C*. Найти радиус сферы. $\left(\textit{Ответ}: \ 8\sqrt{7}/7 \right)$.

3.29. В основании треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный треугольник *ABC* с основанием $BC = 8$ и медианой $AM = 6$, точка *P* – середина медианы *AM*. Сфера касается боковых ребер AA_1, BB_1, CC_1 призмы и плоскости основания *ABC* в точке *P*. Найти радиус сферы. $\left(\textit{Ответ}: \ 3\sqrt{2} \right)$.

3.30. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием *ABC* и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 все ребра равны 6. Точки *P* и *Q* расположены соответственно на ребрах *BC* и A_1C_1 так, что $BP : PC = A_1Q : QC_1 = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей ACC_1A_1 и ABB_1A_1, лежит на отрезке *PQ*. Найти радиус шара. $\left(\textit{Ответ}: \ \sqrt{3} \right)$.

3.31. В основании правильной четырехугольной пирамиды лежит квадрат *ABCD* со стороной 6, высота пирамиды равна 4. Точки *K* и *L* расположены соответственно на ребрах *AD* и *SC* так, что $AK : KD = SL : LC = 1 : 2$. Центр шара, касающегося плоскостей *ASB* и *CSD*, лежит на отрезке *KL*. Найти радиус шара. $\left(\textit{Ответ}: \ {}^{8}\!/_{5} \right)$.

3.32. Основанием параллелепипеда является параллелограмм *ABCD*, в котором $\angle A = 60°$, $AP = 3$, $AD = 1$. Боковые ребра AA_1,

BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны $\sqrt{3}$. Точка M выбрана на ребре CD так, что $DM = 2 \cdot CM$. Сфера касается плоскостей $ABCD$ и AA_1D_1D, причем точки ее касания с плоскостями лежат соответственно на прямых BM и AD_1. Найти радиус сферы. $\left(\textit{Ответ}: \ \ 3\sqrt{3}/2 \right)$.

3.33. Дан правильный тетраэдр $ABCD$ с ребром длиной 1. Прямая l лежит в плоскости ACD и проходит через точку C перпендикулярно AC. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней двугранного угла при ребре AB и прямой l. $\left(\textit{Ответ}: \ \ \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}+\sqrt{11}} \right)$.

3.34. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ с основанием ABC длины всех ребер равны 1. Точки M и N – середины ребер A_1C_1 и CC_1 соответственно. Найти минимально возможный радиус шара, касающегося плоскостей граней AA_1B_1B, ABC и прямой MN. $\left(\textit{Ответ}: \ \ 3\sqrt{3}\Big/\left(4+2\sqrt{3}+2\sqrt{7}\right) \right)$.

3.35. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через середины ребер AA_1, BB_1 и через вершины A и C_1. $\left(\textit{Ответ}: \ \ a\sqrt{\dfrac{7}{8}} \right)$.

3.36. В основании пирамиды лежит правильный треугольник со стороной равной *a,* боковое ребро равно *b*. Найдите радиус шара, касающегося всех ребер пирамиды или их продолжений. $\left(\textit{Ответ}: \ \ \dfrac{(2b \pm a)\cdot a}{2\sqrt{3b^2 - a^2}} \right)$.

3.37. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат со стороной *a*. Высота параллелепипеда равна *b*.Найдите радиус сферы, проходящей через концы стороны AB основания и касающейся граней параллелепипеда, параллельных AB.

3.38. Дан правильный тетраэдр ABCD с ребром a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины C и D и середины ребер AB и AC. $\left(\textit{Ответ}: \ \dfrac{a\sqrt{22}}{8} \right)$.

Контрольная работа

Вариант 1

1. Около шара описана правильная четырехугольная пирамида, высота которой вчетверо больше диаметра шара. Найти отношение объема шара к объему пирамиды.
2. В сферу вписан правильный тетраэдр, затем в тетраэдр снова вписана сфера. Найти отношение площадей двух сфер.
3. Основание пирамиды – правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.
4. Около шара описан прямой параллелепипед, у которого диагонали основания равны a и b. Определить полную поверхность параллелепипеда.
5. Окружность, вписанная в правильный треугольник LMN, является сечением сферы, центр которой находится в точке O. Отношение площади полной поверхности пирамиды $OLMN$ к площади поверхности сферы равно k. Найти величину угла OLM и указать все значения, которые может принимать k в условиях задачи.
6. В пирамиде $ABCD$ ребро DC перпендикулярно плоскости основания ABC, $\angle ACB = 60°$, $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = \sqrt{13}$. Центр сферы радиуса 5 находится на вершине D. Найти длину линии пересечения сферы с основанием ABC.
7. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1; длина ребра куба равна 1. Сфера касается ребер AA_1, AD, AB и пересекает ребро CC_1 в точке M такой, что $CM = 0{,}31$. Найти радиус сферы.

8. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Точка O – центр шара, касающегося ребер AS, BS и BC. Найти расстояние от точки O до плоскости ABC, если известно, что точка O лежит внутри тетраэдра и $AO = \sqrt{13/6}$.

9. Дан куб $ABCDA_1D_1C_1D_1$ с ребром 1. Центр сферы радиуса 1 находится на вершине D. Вторая сфера, центр которой находится внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла куба с вершиной A_1. Найти радиус сферы.

10. В основании прямоугольного параллелепипеда лежит квадрат $ABCD$ со стороной 1, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 имеют длину 4. Сфера, центр которой лежит внутри параллелепипеда, касается граней $ABCD$, AA_1B_1B, AA_1D_1D и прямой A_1C. Найти радиус сферы.

Вариант 2.

1. В правильной треугольной пирамиде отношение бокового ребра к высоте пирамиды равно 2. Найти отношение радиуса вписанного в пирамиду шара к стороне основания пирамиды.

2. В правильный тетраэдр вписана сфера, в сферу вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объемов двух тетраэдров.

3. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, сторона основания которого равна 3 см. Одно из боковых ребер равно 2 см и перпендикулярно основанию. Найти радиус описанной сферы.

4. Около шара описана прямая призма в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями равными a и b. Найти полную поверхность призмы.

5. Сфера с центром в точке S проходит через вершины основания $ABCD$ правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$. Отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Найти величину угла ASB и указать все значения, которые может принимать a в условиях задачи.

6. Все ребра правильной шестиугольной пирамиды равны 1, на вершине A_1 находится центр сферы радиуса 2. Найти длину линии пересечения сферы и основания $ABCDEF$.
7. Дан куб с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1; длина ребра куба равна 1. Каждая из двух сфер одинакового радиуса $R = \sqrt{3}/2$ касается ребра AB основания и боковых ребер AA_1 и CC_1, не принадлежащих одной грани. Найти расстояние между центрами этих сфер.
8. Длина ребра правильного тетраэдра $SABC$ равна 1. Точка O – центр шара радиуса $\sqrt{2}$, касающегося лучей AS, AC и AB. Найти длину отрезка OK, где K – середина SC.
9. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. На ребре AD как на диаметре построена сфера. Вторая сфера, лежащая внутри куба, касается первой сферы и граней трехгранного угла с вершиной B_1. Определить радиус второй сферы.
10. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит правильный треугольник ABC со стороной $4/\sqrt{3}$, высота призмы равна 3. Пусть K – точка пересечения диагоналей BC_1 и B_1C боковой грани BB_1C_1C. Сфера, центр которой принадлежит призме, касается прямой A_1K и граней ABC, AA_1B_1B, AA_1C_1C. Найти радиус сферы.

IV Приложение: задачи из вариантов ЕГЭ

Задача 15. *Отрезок LM – диаметр сферы. Точки K, N лежат на сфере так, что объем пирамиды NKLM наибольший. Найти синус угла между прямой MT и плоскостью LMN, если T – середина ребра KN.*

Решение. Пусть O – центр сферы, а R – ее радиус. Тогда $LM = 2R$ как диаметр сферы. Поскольку точки K и N лежат на сфере, то OL = OM = OK = ON = R. Сечения сферы плоскостями LKM и LNM – окружности радиуса R, описанные около треугольников LKM и LNM, причем $\angle LKM = \angle LNM = 90^0$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр LM.

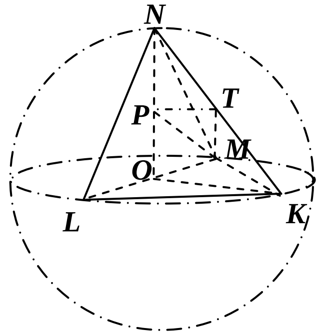

Рис. 18

Пусть H – высота пирамиды NKLM, опущенная из вершины N, а h – высота треугольника LKM, проведенная к стороне LM (рис. 18). Поскольку точка N лежит на сфере, а плоскость KLM содержит центр сферы, то $H \le R$, причем $H = R$, если $NO \perp LKM$. Аналогично, поскольку точка K лежит на сфере, то $h \le R$, причем $h = R$, если $KO \perp LM$. Отсюда для объема пирамиды NKLM имеем $V_{NKLM} = \frac{1}{3} S_{LKM} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot LM \cdot h \cdot H \le \frac{1}{6} \cdot 2R \cdot R \cdot R = \frac{R^3}{3}$. При этом $V_{NKLM} = \frac{R^3}{3}$, если $H = h = R$. Таким образом, пирамида NKLM имеет наибольший объем, если треугольники LKM и LNM – прямоугольные, равнобедренные с общей гипотенузой LM, лежащие во взаимно перпендикулярных плоскостях.

Поскольку $NO \perp LKM$, то $NO \perp OK$. Но $LM \perp OK$, поэтому по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $OK \perp LMN$. Пусть P – середина NO. Тогда PT – средняя линия треугольника KON. Следовательно, PT||OK и поэтому $PT \perp LMN$. Значит, PM –

проекция TM на плоскость LMN, и поэтому $\angle TMP$ – угол между прямой TM и плоскостью LMN. Пусть $\angle TMP = \alpha$.

По свойству средней линии треугольника KON отрезок $PT = 0{,}5OK = 0{,}5R$. Так как треугольники KON, KOM, NOM равны по двум катетам, то треугольник MNK – правильный со стороной $KM = OK\sqrt{2} = R\sqrt{2}$. MT – высота треугольника MNK, значит, $MT = \frac{KM\sqrt{3}}{2} = \frac{R\sqrt{6}}{2}$. В треугольнике MPT $\angle MPT = 90^0$. Поэтому $\sin\alpha = \frac{PT}{MT} = \frac{R/2}{\left(R\sqrt{6}\right)/2} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 16. *В пирамиде FABC грани ABF и ABC перпендикулярны, FB:FA =81:56 . Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 3. Точка M выбрана на ребре BC так, что BM : MC =2:7 . Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды FABC, лежит на ребре AB, площадь этой сферы равна 4π. Найти объем пирамиды ACMT.*

Решение Пусть R – радиус сферы, описанной около пирамиды FABC. Тогда из условия имеем $4R\pi^2 = 4\pi$. Отсюда R = 1. Пусть O – центр этой сферы, тогда

OA = OB = OC = OF = R = 1, а так как O лежит на ребре AB, то O – середина отрезка AB и треугольники ABC и ABF – прямоугольные с общей гипотенузой AB (рис. 19).

По условию $T \in AF$ и TB = TM. Опустим из точки T в плоскости ABF перпендикуляр TH на прямую AB. Так как $ABF \perp ABC$, то $TH \perp ABC$ и, следовательно, отрезки HM и HB – проекции равных наклонных TM и TB. Значит, HM = HB и поэтому треугольник BHM – равнобедренный,

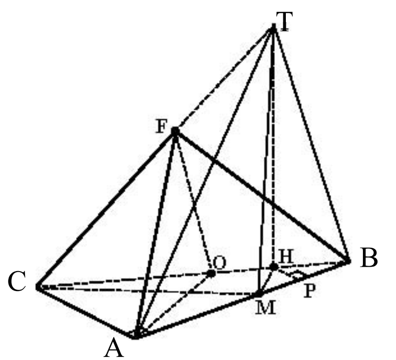

Рис.19

а его высота HP является медианой, то есть MP = PB.

Плоскости ABF и ABC перпендикулярны, поэтому проекцией прямой BC на плоскость ABF является прямая AB. Отсюда угол между прямой BC и плоскостью ABF равен углу B треугольника ABC, и по условию tg B =3.

Значит, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin B = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Так как AB = 2R = 2, то BC =AB cos B $= \frac{2}{\sqrt{10}}$, AC =AB sinB $= \frac{6}{\sqrt{10}}$.

Так как TH $\perp$ ABC, то TH – высота пирамиды ACMT. Объем V этой пирамиды найдем по формуле $V = \frac{1}{3} TH \cdot S_{\Delta AMC}$, где $S_{\Delta AMC}$ – площадь треугольника ACM. Треугольник ACM – прямоугольный, поэтому S_{AMC} =0,5AC MC . Так как BM : MC =2:7 , то BC : MC =9:7. Поэтому MC $= \frac{7BC}{9} = \frac{14}{9\sqrt{10}}$. Отсюда $S_{\Delta AMC} = \frac{7}{15}$.

Так как BM : MC =2:7 и MP = PB, то можем написать BP =PM =a , MC =7a . Отсюда $\frac{PC}{BC} = \frac{8}{9}$. Так как HP || AC, то $\frac{AH}{AB} = \frac{PC}{BC} = \frac{8}{9}$ и отсюда $AH = \frac{8}{9} AB = \frac{16}{9}$. В прямоугольном треугольнике AFB отношение $\frac{FB}{FA} = tg\alpha = \frac{81}{56}$. Поэтому из прямоугольного треугольника ATH находим $TH = AH tg\alpha = \frac{18}{7}$. Окончательно $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{18}{7} \cdot \frac{7}{15} = 0{,}4$.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. В шар радиусом $\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 45°. Найти объем призмы. (*Ответ:36*).

4.2. Отрезок AB – диаметр сферы. Точки C, D лежат на сфере так, что объем пирамиды ABCD наибольший. Найти тангенс угла между прямой CM и плоскостью ABD, если M – середина ребра BD. (*Ответ:* $\sqrt{2}$).

4.3. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D – последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды FABCD наибольший. Точки M и L – середины ребер FD и FB соответственно. Площадь треугольника CML равна $4\sqrt{5}$. Найти радиус сферы. (*Ответ: 4*)

4.4. Дана сфера радиуса 5. Плоскость сечения сферы удалена от ее центра на расстояние 3. Точка T выбрана на сфере, а точки K, L, M, N – последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды TKLMN наибольший. Точка A – середина ребра TL. Найти тангенс угла между прямой MA и плоскостью TKM. (*Ответ:* $\frac{1}{2\sqrt{2}}$).

4.5. Около правильной пирамиды FABC описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что AM:MB =1:5 . Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Объем пирамиды TACM равен $\frac{21\sqrt{3}}{16}$. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды FABC. (*Ответ:3*).

4.6. Около правильной пирамиды FABC описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды, площадь сферы равна $\frac{100\pi}{3}$. Точка M лежит на ребре AB так, что AM:MB $=2$:3. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Найти объем пирамиды TBCM. (*Ответ:* 35/4).

4.7. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C, D – последовательно на окружности сечения так, что объем пирамиды FABCD наибольший. Точки M, T, L – середины ребер FB, CD и AD соответственно. Площадь треугольника MLT равна $64\sqrt{5}$. Найти радиус сферы. (Ответ: 16).

4.8. Отрезок LM – диаметр сферы. Точки K, N лежат на сфере так, что объем пирамиды NKLM наибольший. Найдите синус угла между прямой MT и плоскостью LMN, если T – середина ребра KN. $\left(\textit{Ответ}: \sqrt{\frac{1}{6}} \right)$.

Использованная и рекомендуемая литература

1. *Белоносов М.В.*, *Фокин М.В.* Задачи вступительных экзаменов по математике: Учеб. пособие. Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та: Сиб. Унив. изд-во, 2002.
2. Денищеваа Л.О., Глазков Ю.А. и др. Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся. /ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2009.
3. Шарыгин И.Ф. Стандарт по математике: 500 геометрических задач: кн. для учителя. - М.: Просвещение, 2005.
4. Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. - М.: Дрофа, 1999.
5. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / Под ред. *Прилепко А.И.* – М.: Высшая школа 1989.
6. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: Учеб. пособие /В.К.Егерев, В.В. Зайцев и др.; Под ред. *Сканави М.И.* – М.: Издательский Дом ОНИКС: Альянс-В, 2000.

Методическое пособие

Осипенко Лариса Анатольевна

Комбинации сферы и многогранников.
Задачи и упражнения
Серия «Университетский лицей»

Компьютерный набор Кодуа В.

МОУ Лицей ИГУ г. Иркутска
Г. Иркутск, ул. Курчатова, 13а
Тел./факс (3952) 41-05-35
e-mail: ligu_irk@mail.ru

Подписано в печать16.03.08. Формат 60x84 1/16
Бумага офисная. Печать DUPLO.
Заказ 5. Тираж 200 экз. Усл. Печ .л. 3,06

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ЛИЦЕЙ

Вып.1 О.В.Кузьмин. Принцип Дирихле.
Вып.2 Э.А. Маричева. Практикум к курсу «Биология человека».
Вып.3 Э.Ф. Дубинина, Л.Н. Шеметова. Компьютерная графика.
Вып.4 Э.Ф. Дубинина, Л.Н. Шеметова. Компьютерная графика. CorelDRAW
Вып.5. Л.А. Осипенко. Комбинации сферы и многогранников. Задачи и упражнения