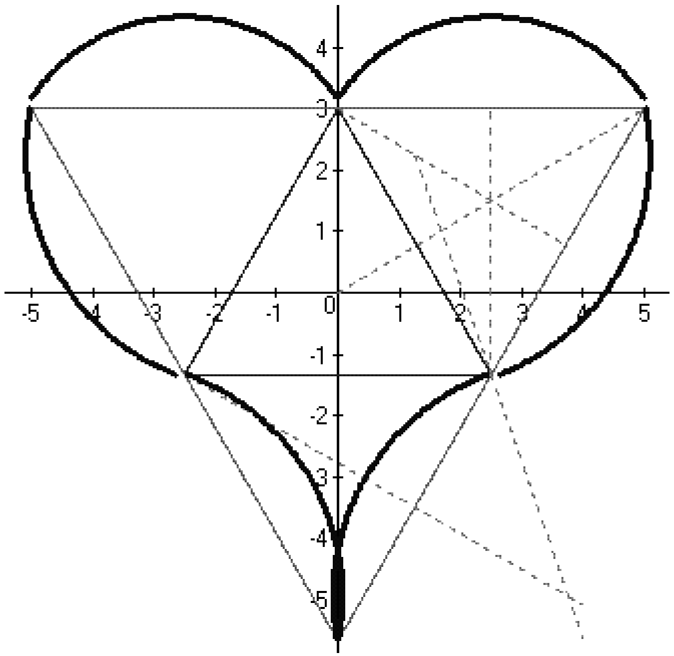
Университетский лицей

Л.А. Осипенко
Е.Э. Стацевичуте

Опорные задачи планиметрии



Иркутск, 2010

Министерство образования и науки Российской Федерации
Иркутский государственный университет
Лаборатория педагогического творчества
Лицей ИГУ

Л.А. Осипенко
Е.Э. Стацевичуте

Опорные задачи планиметрии

Методическое пособие

Иркутск, 2010

Осипенко Л.А., Стацевичуте Е.Э., Опорные задачи в планиметрии: методическое пособие. – Иркутск, 2010. – 48 с.: ил. – (Серия «Университетский лицей»)

Рассматриваются опорные задачи, отражающие важные свойства геометрических фигур и демонстрирующие различные подходы к решению планиметрических задач.

Предназначено для учителей и учащихся лицеев, гимназий и общеобразовательных школ. Может быть использовано при подготовке к ЕГЭ.

Рецензенты: Кузьмин О.В., д.ф.-м. н., профессор (ИГУ),
Кузуб Н.М., к.ф.-м.н., доцент (ВСГАО)

Содержание

Введение

Планиметрия, пожалуй, один из самых интересных и вместе с тем один из самых сложных разделов школьной математики. Геометрию, как предмета, боятся и ученики и учителя. Нет ни алгоритмов, ни единых правил, зато есть много формул и теорем. Впрочем, одно правило можно сформулировать: чтобы научиться решать геометрические задачи, надо их решать. Можно предложить и некоторые приемы, которые могут помочь найти «ключ» к геометрическим задачам.

Например, полезно начать решение с того, что отметить на чертеже все равные элементы (углы, отрезки), затем вычислить «все, что можно», то есть найти те величины, которые легко определяются исходя из условия задачи. Затем продолжить решать задачу «с конца»: ответить на вопрос, что надо знать, чтобы получить искомую величину. Возможно, окажется, что все необходимые элементы вы уже знаете или можете легко их получить.

Можно попробовать решить задачу с помощью алгебры. Для этого обозначить все неизвестные элементы за *x, y, z* и.т.д., а затем составить систему уравнений и/или неравенств, связывающих эти неизвестные.

Конечно, наиболее красивые и короткие решения получаются, если удается провести удачные дополнительные построения. А как их увидеть? Как понять какой метод подойдет к данной конкретной задаче? Здесь можно провести аналогию с шахматной игрой. Хороший шахматист знает наизусть много шахматных партий. Чтобы научиться хорошо решать геометрические (особенно планиметрические) задачи надо знать решения многих задач. Именно решения, а не только результат.

В данном пособии приводятся задачи, которые, на наш взгляд, могут оказаться полезными не только своим содержанием, но и методами решения. Это так называемые опорные задачи. Каждая из них может либо подсказать метод решения аналогичной задачи, либо помочь найти какую-либо новую величину,

необходимую для решения, то есть сыграть роль дебюта в шахматной партии.

I Треугольники и четырехугольники

Свойства медиан треугольника

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Из школьного курса геометрии хорошо известны следующие свойства медиан:

Утверждение 1.1. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

Утверждение 1.2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины.

Точка пересечения медиан является *центром тяжести* треугольника.

Задача 1.1. Вычислить длину медианы треугольника, если известны длины трех его сторон.

Решение. Будем решать задачу *методом дополнительных построений*. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$. Обозначим медиану AD через m_a, требуется вычислить длину m_a. Отложим на продолжении луча AD за точку D отрезок $DE=AD$ и соединим точки B, E и C (рис. 1). Так как в полученном четырехугольнике $ABEC$ диагонали точкой пересечения делятся пополам, то $ABEC$ – параллелограмм.

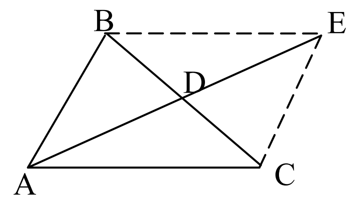


Рис. 1

По следствию из теоремы косинусов (сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон) получаем:

$AE^2 + BC^2 = 2\cdot(AC^2 + AB^2)$ или $(2m_a)^2 + a^2 = 2(b^2 + c^2)$, отсюда $m_a = \dfrac{\sqrt{2\cdot(b^2+c^2)-a^2}}{2}$.

Ответ: $m_a = \dfrac{\sqrt{2\cdot(b^2+c^2)-a^2}}{2}$.

Из последней формулы, в частности, следует

Утверждение 1.3. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла равна половине гипотенузы.

Методические замечания

1. Решение задачи 1.1 можно начать с другого построения – достроить треугольник *ABC* до параллелограмма *ABEC* и продлить медиану *AD* до диагонали *AE* параллелограмма. Но это, зачастую, приводит к ошибке: учащиеся применяют подобное построение и в случае, когда *AD* – биссектриса или высота.

2. Важно помнить не саму формулу, а «путь» к ней: то есть дополнительное построение и равенство, полученное на основании следствия из теоремы косинусов.

3. Утверждение 1.3 следует также из того факта, что середина гипотенузы прямоугольного треугольника является центром описанной около треугольника окружности.

4. Справедливо утверждение, обратное утверждению 1.3: если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

Задача 1.2. Доказать, что медианы треугольника разбивают его на шесть равновеликих треугольников.

Решение. Пусть дан треугольник *ABC*, в котором *AD*, *BE* и *CF* – медианы. Обозначим площади получившихся треугольников через $S_1, S_2, \ldots S_6$, как показано на рисунке 2. Тогда, как следует из утверждения 1.1:

$$S_1 = S_2,\quad S_3 = S_4,\quad S_5 = S_6. \tag{1}$$

Используя, далее, свойство аддитивности площади и утверждение 1.1, получаем: $S_6 + S_1 + S_2 = S_3 + S_4 + S_5$.

Или, с учетом (1), $2S_2 = 2S_3$, то есть $S_2 = S_3$. Аналогично доказывается, что $S_4 = S_5$ и $S_6 = S_1$.

Транзитивность отношения равенства позволяет сделать вывод о равенстве всех шести площадей.

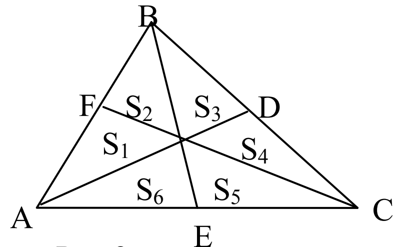


Рис.2

Методическое замечание

Задача 1.2 относится к классу *аффинных*, так как в ней рассматриваются инварианты аффинных преобразований: принадлежность точки прямой, отношение отрезков, лежащих на одной или параллельных прямых, отношение площадей многоугольников. Поэтому можно было доказать справедливость утверждения, например, для правильного треугольника. Так как все треугольники аффинно-эквивалентны [8], то утверждение будет справедливым и для произвольного треугольника.

Следующая задача также относится к классу аффинных:

Задача 1.3. На стороне *BC* треугольника *ABC* выбрана точка *D* так, что *BD:DC=m:n*. Найти в каком отношении медиана *BE* делит отрезок *AD* и в каком отношении прямая *AD* делит медиану *BE*.

Решение. Обозначим точку пересечения *AD* и *BE* через *K* и проведем *EF* || *AD*, *DM*||*BE* (рис. 3).

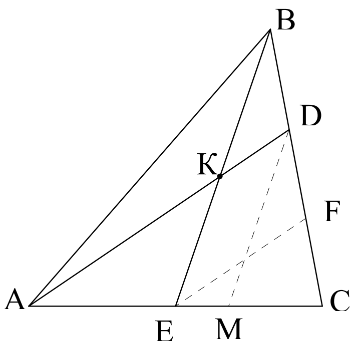


Рис. 3

Найдем сначала отношение $AK:KD$. По теореме Фалеса получаем: $AK:KD = AE:EM$.

Определим в каком отношении точка M делит отрезок EC: $EM : MC = BD : DC = m : n$, следовательно, $EM : EC = m : (m+n)$ или $EM = \frac{m}{m+n} \cdot EC$. Теперь, учитывая, что $AE=EC$, можно получить искомое отношение:

$$AK : KD = AE : EM = \frac{m+n}{n}\frac{AE}{EC} = 1 + \frac{m}{n}.$$

Найдем отношение $BK:KE$:

$$BK : KE = BD : DF = \frac{BD}{0{,}5DC} = \frac{2m}{n}.$$

Ответ: $1+\frac{m}{n}, \frac{2m}{n}$.

Замечание. Задача 1.3 является частным случаем более общего утверждения: если на сторонах BC и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, так, что $BD:DC=m:n$, а $AE:EC=p:q$ и прямые AD и BE пересекаются в точке K, то $BK : KE = \frac{m}{n}\left(1+\frac{p}{q}\right)$.

Задача 1.4. Стороны одного из треугольников равны и параллельны медианам другого. Найти отношение площадей этих треугольников.

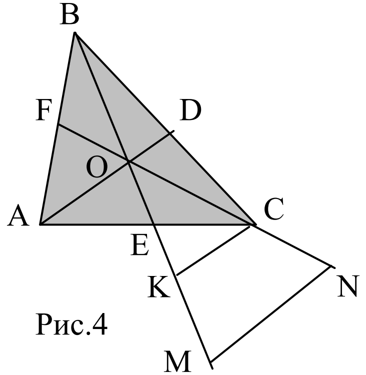


Рис.4

Решение. Применим еще одно дополнительное построение, которое бывает полезным при решении задач, связанных с медианами треугольника, а также метод *сравнения площадей.*

Пусть AD, BE и CF – медианы данного треугольника ABC. Отложим на продолжении луча BE за точку E отрезки $EK=KM=OE$. Соединим точки K и C и проведем отрезок MN, параллельно KC, так, что точка N лежит на прямой OC (рис. 4).

Рассмотрим треугольник OKC: используя утверждение 1.2 для медиан треугольника, получаем: $OC = \frac{2}{3}CF$, $OK = 2OE = \frac{2}{3}BE$. Далее, из равенства треугольников KEC и OEA следует, что $KC=AO$, то есть $KC = \frac{2}{3}AD$. Кроме того отрезки OC и FC, OK и BE, KC и AD попарно параллельны (отрезки называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой и не совпадают).

Так как $MN \| KC$, то треугольник MON подобен треугольнику KOC, и по построению $MO:KO=3:2$. Следовательно, $MO = \frac{3}{2}KO = BE$, $MN = \frac{3}{2}KC = AD$, $ON = \frac{3}{2}OC = FC$.

Таким образом, стороны треугольника MON равны по длине и параллельны медианам данного треугольника ABC. Найдем отношение площадей этих треугольников.

Так как $OE=EK$, то треугольники OCE и CEK равновелики (утверждение 1.1), кроме того, $S_{\Delta OCE} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$ (задача 1.2). Поэтому

$$S_{\Delta KOC} = 2S_{\Delta OCE} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}. \quad (2)$$

Далее, так как треугольники MON и KOC подобны, то

$$S_{\Delta MON} : S_{\Delta KOC} = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad (3)$$

Из (2) и (3) следует, что $\frac{S_{\Delta MON}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{S_{\Delta MON}}{3S_{\Delta KOC}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4}$.

Ответ: 3:4

Методическое замечание

Отметим, что формулу, полученную в задаче запоминать также не обязательно. На практике удобнее применять соотношение (2).

Свойства биссектрис треугольника

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой на противолежащей стороне этого треугольника.

Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является *центром вписанной окружности.*

Хорошо известно следующее свойство биссектрисы треугольника:

Утверждение 1.4. Биссектриса треугольника делит противоположную сторону треугольника на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам.

Аналогичным свойством обладает биссектриса внешнего угла треугольника.

Задача 1.5. Доказать, что если биссектриса внешнего угла при вершине B треугольника *ABC* пересекает прямую *AC* в точке *D*, то *DA:DC=BA:BC.*

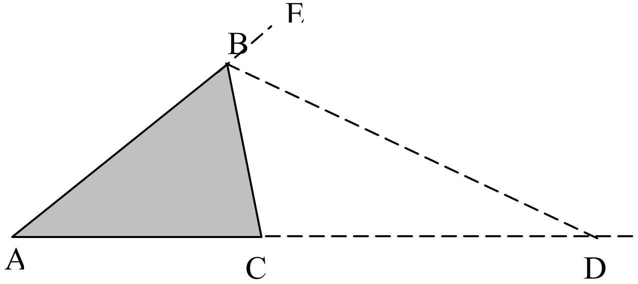


Рис. 5

Решение. По теореме синусов из треугольников *ABD* и *CBD* соответственно получаем (рис. 5):

$$\frac{BA}{\sin BDA} = \frac{DA}{\sin ABD}\ , \quad \frac{BC}{\sin BDA} = \frac{DC}{\sin CBD}. \tag{5}$$

Так как $\angle CBD = \angle DBE$, то с учетом формул приведения имеем $\sin\angle ABD = \sin\angle DBE = \sin\angle CBD$. Поэтому, из (5) следует: $\frac{BA}{DA} = \frac{\sin BDA}{\sin CBD} = \frac{BC}{DC}$ или $\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 1.6. Вычислить длину биссектрисы треугольника, если известны длинны двух прилежащих сторон треугольника и угол между ними.

Решение. Пусть в треугольнике *ABC* известно, что $AB = c,\ BC = a,\ \angle ABC = \beta$. Обозначим биссектрису BD через l_b Требуется найти l_b (рис.6).

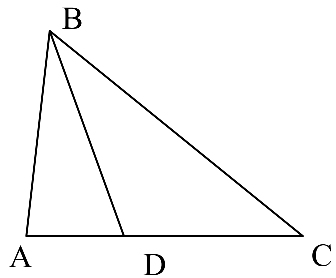


Рис.6

Будем решать задачу *методом площадей.* Основываясь на свойстве аддитивности площади, получаем следующее равенство:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DBC}$$ или

$$\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC = \frac{1}{2}AB\cdot BD\cdot\sin\angle ABD + \frac{1}{2}BD\cdot BC\cdot\sin\angle DBC.$$

Отсюда $c\cdot a\cdot\sin\beta = c\cdot BD\cdot\sin\frac{\beta}{2} + BD\cdot a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$.

Используя формулу синуса двойного угла после несложных алгебраических преобразований, получаем:

$$l_b = \frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2} \tag{6}$$

Ответ: $l_b = \frac{2ac}{a+c}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$.

Методическое замечание

Выражение $\dfrac{2ac}{a+c}$ называется *средним гармоническим* чисел a и c. Поэтому формулу (6) можно запомнить следующим образом: биссектриса треугольника равна произведению среднего гармонического прилежащих сторон треугольника на косинус половинного угла между ними.

Задача 1.7. Вычислить длину биссектрисы треугольника, если известны отрезки, на которые она делит противолежащую сторону треугольника и длины прилежащих сторон.

Решение. Пусть в треугольнике ABC известно, что $AB=c$, $BC=a$, $AD=c_1$, $DC=a_1$. Обозначим $BD=l_b$. Требуется найти l_b.

Будем решать задачу *методом вспомогательной окружности*. Опишем вокруг треугольника ABC окружность и продлим биссектрису BD до пересечения с окружностью в точке E (рис. 7). Тогда треугольники BDA и BCE подобны ($\angle ABD=\angle EBC$, так как BD – биссектриса, $\angle BAC=\angle BEC=\dfrac{1}{2}\cup BC$). Поэтому $\dfrac{AB}{EB}=\dfrac{BD}{BC}$ или

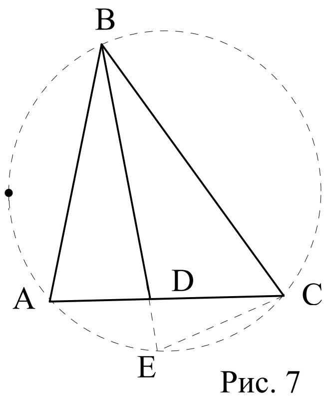


Рис. 7

$$\frac{c}{l_b+DE}=\frac{l_b}{a} \qquad (7)$$

По теореме о пропорциональных отрезках хорд и касательных к окружности $BD\cdot DE=AD\cdot DC$, то есть

$$DE=\frac{a_1c_1}{l_b}\ . \qquad (8)$$

Подставляя значение для DE из (8) в (7) и выражая l_b, получаем: $l_b=\sqrt{ac-a_1c_1}$.

Ответ: $l_b=\sqrt{ac-a_1c_1}$.

Замечание. Используя формулу, полученную в задаче 1.7 и утверждение 1.4 можно вывести формулу для вычисления длины биссектрисы треугольника, если известны длины всех его сторон: $l_b=\dfrac{\sqrt{ac(a+c-b)(a+c+b)}}{a+c}$.

Задача 1.8. Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными к гипотенузе.

Решение. Пусть в треугольнике $ABC\ (\angle C=90^\circ)$ CH – высота, CK – биссектриса, CM – медиана.

Для определенности будем считать, что $\angle A<45^\circ$ (рис.8). Если $\angle A=\angle B=45^\circ$ задача теряет смысл.

Так как $CM = AM = MB$ (утверждение 1.3), то треугольник CMA – равнобедренный и, следовательно,

$$\angle CAB=\angle MCA\ . \qquad (9)$$

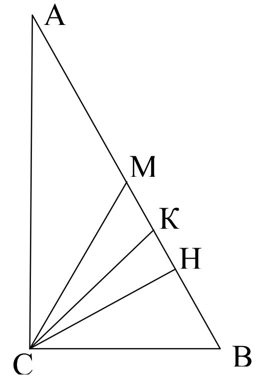


Рис. 8

Так как $\angle CHB=90^\circ$, то

$$\angle HCB=90^\circ-\angle HBC=\angle CAB\ . \qquad (10)$$

Из (9) и (10) получаем, что $\angle MCA=\angle HCB$.

Теперь легко доказать равенство углов MCK и HCK :

$\angle MCK=45^\circ-\angle MCA=45^\circ-\angle HCB=\angle HCK$. То есть CK делит $\angle MCH$ пополам, что и требовалось доказать.

Методическое замечание

Справедливо обратное утверждение: если в треугольнике биссектриса одного из углов делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из той же вершины, то треугольник прямоугольный.

Доказательство этого можно провести методом вспомогательной окружности [10].

Свойства высот треугольника

Высотой треугольника называется перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону.

В зависимости от типа треугольника высота может содержаться внутри треугольника (для остроугольного треугольника), совпадать с его стороной (являться катетом прямоугольного треугольника) или проходить вне треугольника (для тупоугольного треугольника).

Высоты треугольника пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром.*

Высота h треугольника, проведенная к стороне a может быть легко вычислена, если известна его площадь S: $h=\dfrac{2S}{a}$.

В частности, высота прямоугольного треугольника с катетами a и b, опущенная на гипотенузу c, может быть вычислена по формуле: $h=\dfrac{2S}{c}=\dfrac{ab}{c}$.

Кроме того, для высоты, опущенной из вершины прямого угла справедливо

Утверждение 1.5. Высота прямоугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является средним геометрическим отрезков, на которые основание высоты делит гипотенузу.

Задача 1.9. Известны длины сторон остроугольного треугольника ABC. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины B.

Решение. Пусть в треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ обозначим высоту BH через h_b (рис. 9). Требуется найти h_b.

Вычислим сначала AH, имеем:

$$AB^2-AH^2=BC^2-\left(AC-AH\right)^2,$$ или

$$AH=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}.$$ Поэтому

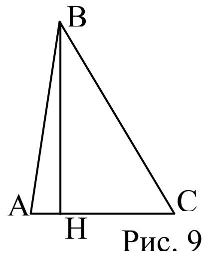


Рис. 9

$$h_b=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)^2}$$

или после несложных преобразований

$$h_b=\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2b}$$

Методическое замечание

При решении задачи 1.9. существенно использовался тот факт, что треугольник остроугольный. Но полученная формула справедлива для любого треугольника, в чем можно легко убедиться, если решить задачу с помощью формулы $h_b=\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{b}$ и формулы Герона. Следует обратить внимание на преимущество такого подхода к вычислению высоты.

Задача 1.10. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1, доказать, что треугольник A_1B_1C подобен треугольнику ABC и найти коэффициент подобия.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда треугольник ABC – остроугольный (рис.10).

Из треугольника CBB_1 : $\dfrac{B_1C}{BC}=\cos C$.

Из треугольника AA_1C:

$\frac{A_1C}{AC} = \cos C$.

Таким образом, $\frac{B_1C}{BC} = \frac{A_1C}{AC}$.

Так как у треугольников ABC и A_1B_1C угол C общий, то эти треугольники подобны по второму признаку подобия. Коэффициент подобия $k = \cos C$.

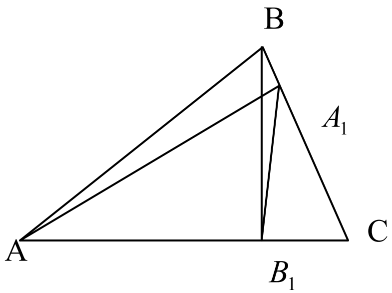


Рис.10

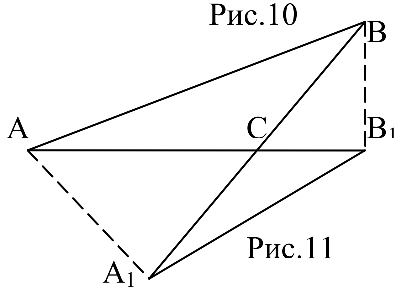


Рис.11

Пусть теперь, в треугольнике ABC угол C – тупой (рис. 11). Тогда

$$\frac{B_1C}{BC} = \frac{A_1C}{AC} = \cos\left(180^\circ - C\right)$$

и, следовательно, треугольники A_1B_1C и ABC подобны с коэффициентом подобия $k = -\cos C$.

Если угол C – прямой, то задача теряет смысл (формально, можно считать, что коэффициент подобия в этом случае также равен $cos\frac{\pi}{2}$).

Аналогично рассматривается случай, когда угол А (или угол В) – тупой.

Таким образом, треугольники A_1B_1C и ABC подобны и $k = |\cos C|$.

Замечание. Из подобия треугольников ABC и A_1B_1C следует равенство углов

$$\angle BAC = \angle B_1A_1C;\ \ \angle ABC = \angle A_1B_1C.$$

В этом случае прямые AB и A_1B_1 называются *антипараллельными относительно прямых AC* и *BC.*

Задача 1.11. Доказать, что высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC являются биссектрисами треугольника $A_1B_1C_1$.

Решение. *Первый способ***.** Докажем, например, что BB_1 делит пополам угол $C_1B_1A_1$ (рис. 12).

Из доказанного в задаче 1.10 следует, что $\Delta ABC \sim \Delta AB_1C_1$ и $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C$, то есть $\Delta AB_1C_1 \sim \Delta A_1B_1C$ и

Далее,

$$\angle C_1B_1B = 90^\circ - \angle AB_1C_1 = 90^\circ - \angle ABC$$

$\angle A_1B_1B = 90^\circ - \angle A_1B_1C = 90^\circ - \angle ABC$, то есть $\angle C_1B_1B = \angle A_1B_1B$.

Аналогично можно доказать, что $\angle B_1C_1C = \angle A_1C_1C$ и $\angle C_1A_1A = \angle B_1A_1A$. Что и требовалось доказать.

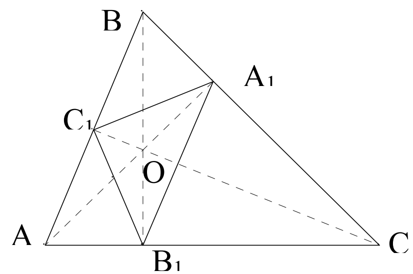


Рис. 12

Второй способ. Утверждение задачи 1.11 можно доказать, используя метод вспомогательной окружности. Заметим, что четырехугольники B_1OA_1C и B_1OC_1A – вписанные, так как

$\angle OB_1C + \angle OA_1C = 180^\circ$,

$\angle AB_1O + \angle AC_1O = 180^\circ$.

Далее, $\angle OB_1A_1 = \angle OCA_1$, $\angle OB_1C_1 = \angle OAC_1$ как опирающиеся на одну дугу и $\angle OAC_1 = \angle OCA_1 = 90^\circ - \angle ABC$. Поэтому $\angle OB_1C_1 = \angle OB_1A_1 = 90^\circ - \angle ABC$. То есть BB_1 делит угол $C_1B_1A_1$ пополам.

Аналогично для других высот треугольника. Что и требовалось доказать.

Задача 1.12. Доказать, что точки, симметричные ортоцентру остроугольного треугольника относительно его сторон, лежат на описанной около этого треугольника окружности.

Решение. Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в точке H, A_1, B_1, C_1 - точки симметричные точке H относительно прямых BC, AC и AB соответственно (рис. 13). Тогда $\angle AB_1C = \angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$, поэтому $\angle AB_1C + \angle ABC = 180^\circ$, то есть точки A, B, C и B_1 лежат на одной окружности. Аналогично можно доказать, что $\angle AC_1B + ACB\angle = 180^\circ$ и $\angle BA_1C + \angle BAC = 180^\circ$.

Что и требовалось доказать.

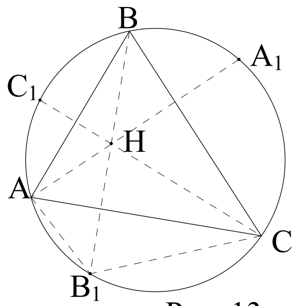


Рис. 13

Замечание. Утверждение задачи 1.12 справедливо и для тупоугольного треугольника.

Трапеция

Трапецией называется выпуклый четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие – нет.

Задача 1.13. Доказать, что высота равнобокой трапеции, опущенная из вершины меньшего основания, делит большее основание трапеции на отрезки, длина которых равна полусумме и полуразности длин оснований.

Решение. Пусть в трапеции *ABCD (BC || AD) BH и CF* – высоты трапеции, опущенные из вершин *B* и *C* соответственно (рис. 14).

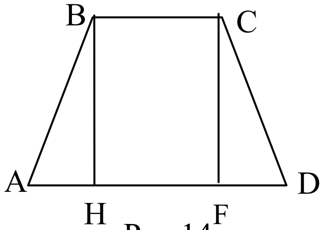


Рис.14

Тогда $AH = FD = \dfrac{AD - BC}{2}$,

$$HD = AD - AH = AD - \frac{AD - BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

Замечание. Из доказанного в задаче 1.13, в частности, следует, что длина отрезка *HD* равна средней линии трапеции и, следовательно, площадь равнобокой трапеции можно вычислить по формуле $S = BH \cdot HD$ (рис. 14).

Задача 1.14. Доказать, что если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то ее высота равна средней линии.

Решение. Пусть в трапеции *ABCD (BC || AD)* диагонали пересекаются в точке *O, EF* – высота трапеции, проходящая через точку *O* (рис. 15). Тогда *OF* – является высотой и медианой равнобедренного треугольника *AOD*, и, следовательно, *OF=0,5AD*. Аналогично, *OE=0,5BC.*

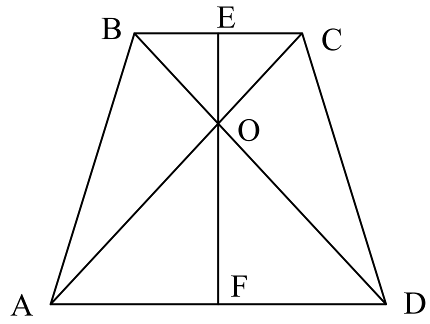


Рис. 15

Таким образом, $EF = OF + OE = \dfrac{AD + BC}{2}$, что и требовалось доказать.

Методические замечания

1. Для доказательства утверждения задачи можно также использовать свойство равнобокой трапеции, доказанное в задаче 1.13. При этом достаточно заметить, что в треугольнике *BHD* угол *BDH* равен 45°.

2. Справедливо и обратное утверждение: если высота равнобокой трапеции равна ее средней линии, то диагонали трапеции взаимно перпендикулярны.

Задача 1.15. Доказать, что отрезок прямой, проходящей через точку пересечения диагоналей трапеции параллельно основаниям, заключенными между ее боковыми сторонами, равен среднему гармоническому оснований трапеции.

Решение. Пусть $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ данная трапеция, $AD = b$, $BC = a$ $(b > a)$.

Пусть, далее O - точка пересечения диагоналей трапеции и прямая, проходящая через точку O параллельно основаниям пересекает боковые стороны трапеции AB и CD в точках M и N соответственно (рис.16).

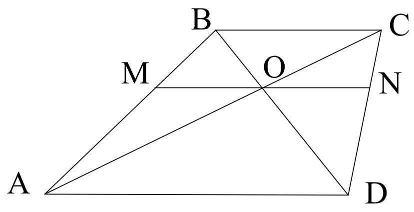


Рис. 16

Требуется доказать, что $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Из подобия треугольников BOC и DOA, заключаем, что $\frac{BO}{DO} = \frac{OC}{OA} = \frac{a}{b}$, поэтому $\frac{BO}{BD} = \frac{OC}{CA} = \frac{a}{a+b}$. Из подобия треугольников MBO и ABD $(AD \parallel MO)$ получаем $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{a}{a+b}$ и, следовательно,

$$MO = \frac{ab}{a+b}. \qquad (11).$$

Аналогично, из подобия треугольников OCN и ACD $(ON \parallel AD)$ получаем, что $\frac{ON}{AD} = \frac{OC}{CA} = \frac{a}{a+b}$ и

$$ON = \frac{ab}{a+b}. \qquad (12)$$

Из равенства (11) и (12) заключаем, во-первых, что $MO = ON$, во-вторых, что $MN = MO + ON = \frac{2ab}{a+b}$.

Что и требовалось доказать.

Задача 1.16. Доказать, что если трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, на две подобные трапеции, то отрезок этой прямой, заключённый между боковыми сторонами, равен среднему геометрическому ее оснований.

Решение. Пусть $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ данная трапеция, $EF \parallel AD$, причем трапеция $EBCF$ подобна трапеции $AEFD$ (рис. 17). Тогда

$$\frac{BC}{EF} = \frac{EF}{AD},$$

то есть $EF = \sqrt{BC \cdot AD}$.

Что и требовалось доказать.

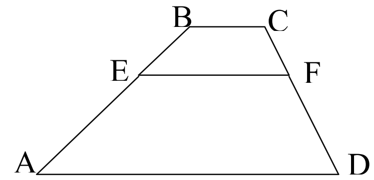


Рис. 17

Задача 1.17. Трапеция разделена прямой, параллельной её основаниям, равным a и b, на две равновеликие трапеции. Найти длину отрезка этой прямой, заключённый между боковыми сторонами.

Решение. Пусть $ABCD$ $(AD \parallel BC)$ данная трапеция, $AD = b$, $BC = a$ $(b > a)$. MP||AD, причем

$$S_{MBCP} = \frac{1}{2} S_{ABCD}. \qquad (13)$$

Проведем $BH \perp AD$, $BE \parallel CD$ и обозначим точки пересечения BH и BE с MP через K и N соответственно (рис. 18). Тогда условие (13) можно записать в виде

$$\frac{MP + BC}{2} \cdot BK = \frac{AD + BC}{4} \cdot BH$$

или

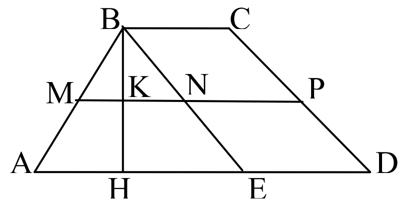


Рис. 18

$$\frac{BK}{BH} = \frac{a+b}{2(MP+a)} \qquad (14)$$

Из подобия треугольников ABE и MBN следует, что $\frac{MN}{AE}=\frac{BK}{BH}$ или $\frac{BK}{BH}=\frac{MP-a}{b-a}$. Сравнивая последнее равенство с (14), получаем, $2(MP^2-a^2)=b^2-a^2$, или $MP=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Замечания.

1.Выражение $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ называется *средним квадратичным (квадратическим) чисел a и* b.

2. Используя утверждения задач 1.15, 1.16 и 1.17, а также свойство средней линии трапеции, можно доказать неравенство между средними двух положительных чисел:

$$\min(a,b)\le\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le\max(a,b).$$

Равенство возможно только в случае *a=b***.**

Задача 1.18. Найти длину отрезка, отсекаемого диагоналями трапеции на средней линии, если основания трапеции равны a и b.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ $(AD\parallel BC)$, $AD=b$, $BC=a$ и для определенности $b>a$. MN - средняя линия трапеции, $M\in AB$; $N\in DC$. Обозначим точки пересечения MN с диагоналями трапеции AC и BD через P и Q соответственно (рис. 19).

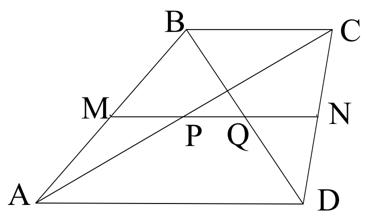


Рис. 19

Рассмотрим ΔABD. Так как $AM=MB$ и $MQ\parallel AD$, то MQ - средняя линия ΔABD и, следовательно $MQ=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}b$.

Аналогично, MP - средняя линия ΔABC и, следовательно $MP=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}a$.

Получаем $PQ=MQ-MP=\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}a=\frac{b-a}{2}$.

Отметим, что если $a>b$, то очевидно, $PQ=\frac{a-b}{2}$.

Таким образом $PQ=\left|\frac{a-b}{2}\right|$.

Ответ: $\left|\frac{a-b}{2}\right|$.

Методическое замечание

Как правило, при построении чертежа изображают трапецию, у которой оба угла при нижнем основании – острые. У трапеции, изображенной на рисунке 19, один из углов при нижнем основании – тупой. В некоторых задачах этот факт может играть важную роль (см., например, задачи 51 - 53).

Задача 1.19. Доказать, что для любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

Решение. Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке *P*, а продолжения боковых сторон AB и CD — в точке *Q* (рис. 20).

Через середину *M* основания *BC* и точку *P* проведём прямую. Пусть она пересекает основание *AD* в точке *N*. Тогда треугольник *BMP* подобен треугольнику *DNP*, а треугольник *CMP*

— треугольнику ANP, причём в обоих случаях коэффициент подобия равен $\dfrac{MP}{PN}$. Значит

$\dfrac{BM}{DN} = \dfrac{MP}{PN} = \dfrac{CM}{AN}$, и так как $BM=CM$, то $DN=AN$. То есть N – середина AD.

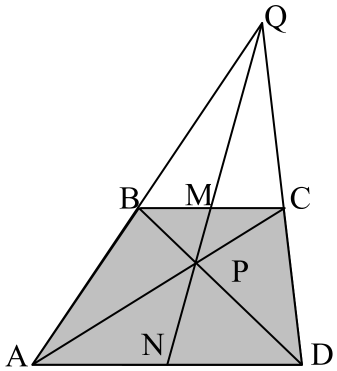


Рис.20

Следовательно, отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения диагоналей.

Аналогично из подобия треугольников AQN и BQM, NQD и MQC доказывается, что прямая, проведённая через середины оснований трапеции, проходит через точку пересечения Q продолжений боковых сторон. Следовательно, точки P, Q и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

Что и требовалось доказать.

Задача 1.20. Доказать, что если сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90°, то отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полу разности.

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ $(AD||BC)$ сумма углов при основании AD равна 90°, M – середина BC, N – середина AD, P – точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции (рис. 21). Точки P, M и N лежат на одной прямой (задача 1.19).

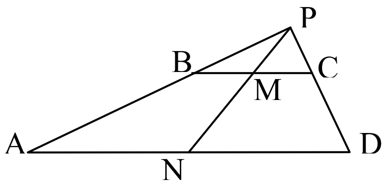


Рис. 21

Из условия задачи следует, что угол APD – прямой; $PN=0{,}5AD$, $PM=0{,}5BC$ (утверждение 1.3). Следовательно, $MN=PN-PM=0{,}5(AD-BC)$, что и требовалось доказать.

Выпуклые четырехугольники

Задача 1.21. Доказать, что четырехугольник, вершинами которого являются середины сторон выпуклого четырехугольника является параллелограммом и вычислить его площадь, если площадь данного четырехугольника равна S.

Решение. Пусть дан четырехугольник $ABCD$, M, N, P, Q - середины сторон AB, BC, CD, DA соответственно (рис. 22).

Проведем диагонали AC и BD тогда MN - средняя линия ΔABC, поэтому $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$; QP - средняя линия ΔACD, поэтому $QP \parallel AC$ и $QP = \frac{1}{2}AC$. Следовательно, $MN \parallel QP$ и $MN = QP$ и по признаку параллелограмма $MNPQ$ - параллелограмм. Вычислим его площадь.

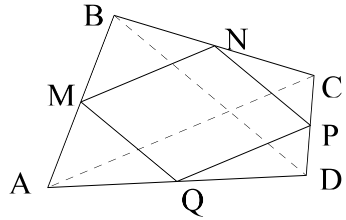


Рис. 22

$\Delta MBN \sim \Delta ABC$ и $\dfrac{MB}{AB} = \dfrac{1}{2}$ следовательно, $\dfrac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{4}$ т.е. $S_{MBN} = \dfrac{1}{4}S_{ABC}$.

Аналогично, $S_{PQD} = \dfrac{1}{4}S_{ADC}$, $S_{MAQ} = \dfrac{1}{4}S_{ABD}$, $S_{NCP} = \dfrac{1}{4}S_{BCD}$.

$$S_{MBN} + S_{PQD} + S_{MAQ} + S_{NCP} = \frac{1}{4}\left(S_{ABC} + S_{ADC} + S_{ABD} + S_{BCD}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}S.$$

Следовательно, $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}S$. Что и требовалось доказать.

II Окружности, связанные с треугольником и четырехугольником

Вписанная окружность

Окружность называется вписанной в выпуклый многоугольник, если она касается всех его сторон. В курсе планиметрии доказываются следующие утверждения:

Утверждение 2.1. В любой треугольник можно вписать окружность и притом только одну. Центром окружности, вписанной в треугольник, является точка пересечения биссектрис треугольника.

Утверждение 2.2. В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных сторон равны.

В частности, из всех параллелограммов только в ромб можно вписать окружность.

Утверждение 2.3. Если в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность, то биссектрисы всех его внутренних углов пересекаются в одной точке, являющейся центром вписанной окружности.

Утверждение 2.4. Радиус окружности, вписанной в выпуклый многоугольник можно вычислить по формуле $r = \frac{S}{p}$, где S –площадь многоугольника, p - его полупериметр.

Задача 2.1. В треугольнике ABC $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$. Найти длины отрезков, на которые вписанная окружность делит сторону AC.

Решение. Пусть D, E и F-точки касания окружности со сторонами треугольника AB, BC и AC соответственно (рис. 23). Найдем длины отрезков AF и FC. По свойству касательных к окружности получаем $AD=AF$, $BE=BD$, $CE=CF$. Поэтому $a+b+c = 2AF + 2a$ или $AF = \frac{a+b+c}{2} - a$. Обозначим через p полупериметр треугольника ABC, тогда $AF=p-a$. $FC = b - AF = p - c$.

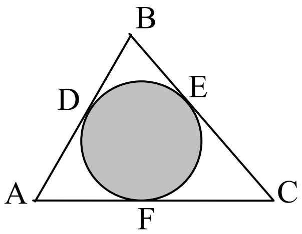


Рис. 23

Ответ: $p-a$, $p-c$.

Замечание. Очевидно, что сторона AB делится точкой касания вписанной окружности на отрезки длиной $p-a$, $p-b$, а сторона BC – на отрезки длиной $p-b$, $p-c$.

Задача 2.2. Доказать, что в прямоугольном треугольнике периметр равен сумме двух диаметров описанной окружности и двух радиусов вписанной окружности.

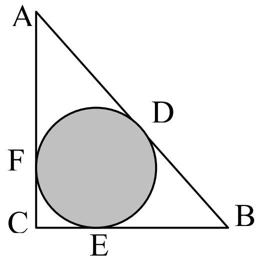


Рис. 24

Решение: Пусть D, E и F- точки касания окружности со сторонами треугольника AB, BC и AC соответственно (рис. 24). Тогда $CE=CF=r$, где r – радиус вписанной окружности, AB=2R, где R – радиус описанной окружности. Получаем

$$a+b+c = 2CE + 2(DB + AD) = 2r + 2AB = 2r + 4R,$$ что и требовалось доказать.

Замечание. Из условия задачи следует, в частности, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник можно вычислить по формуле $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

Задача 2.3. Вычислить радиус окружности, вписанной в треугольник, если известны длины его высот h_a, h_b и h_c.

Решение. Пусть дан треугольник ABC, h_a, h_b, h_c – высоты, опущенные на стороны BC, AC и AB соответственно. Обозначим через r радиус вписанной окружности, тогда для вычисления площади треугольника ABC справедливы следующие формулы:

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot h_a, \quad S = \frac{1}{2}AC \cdot h_b, \quad S = \frac{1}{2}\left(AB + BC + AC\right) \cdot r$$

Выразим из первых трех равенств BC, AC и AB соответственно и подставим в последнее равенство, получим:

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2S}{h_c} + \frac{2S}{h_a} + \frac{2S}{h_b}\right) \cdot r \text{ или}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}. \tag{15}$$

Из формулы (15) можно получить искомое значение радиуса.

Ответ: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$.

Методическое замечание

Для решения задачи 2.3 нет необходимости в построении чертежа, требуемый результат получается *алгебраическим* методом. Этот метод заключается в том, что для определения геометрических величин составляется система уравнений, как правило, содержащая столько уравнений, каково количество неизвестных величин.

Задача 2.4. В трапецию $ABCD$ $\left(AD \parallel BC\right)$ вписана окружность с центром в точке O. Доказать, что треугольники OBA и OCD - прямоугольные.

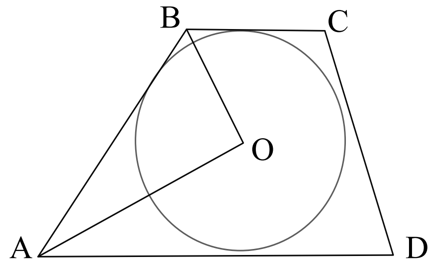


Рис. 25

Решение. Докажем, что $\angle BOA = 90^\circ$.

Так как по условию задачи O - центр вписанной в трапецию окружности, то AO и BO - биссектрисы углов BAD и CBA соответственно (рис. 25).

Поэтому:

$$\angle OBA + \angle BAO = \frac{1}{2}\angle CBA + \frac{1}{2}\angle BAD = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = 90^\circ$$

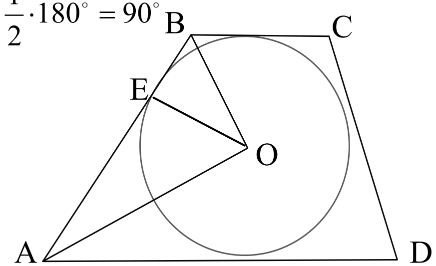


Рис. 26

Так как $\angle BOA = 180^\circ - \left(\angle OBA + \angle BAO\right)$, то $\angle BOA = 90^\circ$, следовательно, треугольник OBA - прямоугольный.

Аналогично можно доказать, что $\angle COD = 90^\circ$ и треугольник OCD - прямоугольный.

Задача 2.5. Вычислить радиус окружности, вписанной в трапецию, если точка касания окружности делит боковую сторону трапеции на отрезки длинной p и q.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ $\left(AD \parallel BC\right)$ и в нее вписана окружность с центром в точке O, которая касается боковой стороны AB в точке E, $AE=p$, $EB=q$ (рис. 26). Как доказано выше (задача 2.4) угол AOB прямой и OE – высота, опущенная из вершины прямого угла. По свойству высоты (утверждение 1.5) получаем $OE = \sqrt{pq}$.

Ответ: $\sqrt{pq}$.

Описанная окружность

Окружность называется *описанной* около выпуклого многоугольника, если на ней лежат все его вершины.

Перечислим основные утверждения, связанные с описанной окружностью:

Утверждение 2.5. Вокруг любого треугольника можно описать окружность и притом только одну.

Утверждение 2.6. Центром окружности, описанной около треугольника, является точка пересечения серединных перпендикуляров. При этом для остроугольного треугольника эта точка находится внутри треугольника, для тупоугольного треугольника – за пределами треугольника.

Центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

Утверждение 2.7. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ можно вычислить по одной из следующих формул:

$$R = \frac{a}{2\sin A} \text{ (следствие из теоремы синусов)} \quad (16)$$

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (17)$$

где S – площадь треугольника ABC.

Утверждение 2.8. Если вокруг выпуклого многоугольника можно описать окружность, то серединные перпендикуляры к его сторонам пересекаются в одной точке, которая является центром описанной окружности.

Утверждение 2.9. Вокруг выпуклого треугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда сумма его двух противоположных углов равна 180°.

В частности, из всех параллелограммов только вокруг прямоугольника можно описать окружность и только вокруг равнобокой трапеции можно описать окружность.

Утверждение 2.10. Если четырехугольник *ABCD* вписанный, то $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ (теорема Птолемея).

Утверждение 2.11. Противоположные стороны вписанного четырехугольника антипараллельны относительно двух других его сторон, а диагонали вписанного четырехугольника антипарраллельны относительно любой пары его противоположных сторон.

Задача 2.6. Биссектриса CC_1 пересекает описанную окружность треугольника *ABC* в точке *P*. Доказать, что

a) точка *P* является серединой дуги *APB*;

b) треугольники *POB* и *POA* равнобедренные, где *O* – центр вписанной окружности треугольника *ABC*;

c) *P* – центр описанной окружности треугольника *AOB*.

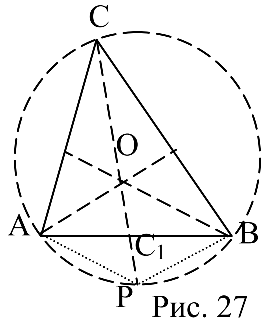


Рис. 27

Решение. *a*) Первое утверждение задачи следует из равенства углов ACP и PCB и теоремы об измерении вписанных углов (рис. 27).

b) Отметим, что точка O – центр вписанной окружности лежит на биссектрисе CC_1. Так как угол C_1OB является внешним углом треугольника COB, а угол C_1OA- внешний угол треугольника AOC, то

$$\angle C_1OB = \angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle A}{2} \quad (18)$$

$$\angle C_1OA = \angle OCC + \angle OAA = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}. \quad (19)$$

Далее, $\angle PAB = \angle PCB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу PB. Аналогично $\angle PBA = \angle PCA$. Поэтому

$$\angle PBO = \angle PCA + \angle ABO = \frac{1}{2}(\angle C + \angle B) = 90^\circ - \frac{\angle A}{2}$$

$$\angle PAO = \angle PCB + \angle BAO = \frac{1}{2}(\angle C + \angle A) = 90^\circ - \frac{\angle B}{2}.$$

Сравнивая последние равенства с (18) и (19) соответственно, получаем, что $\angle PBO = \angle POB$ и $\angle PAO = \angle POA$, то есть треугольники *POB* и *POA* равнобедренные.

Утверждение *c*) задачи является прямым следствием утверждения *b)*, так как *PA=PO=PB*.

Задача 2.7. Биссектриса угла *C* треугольника *ABC* пересекает описанную окружность этого треугольника в точке *P*. O_1 и O_2 - центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно, а *r* и *R* - радиусы этих окружностей.

1) доказать, что $CO_1 \cdot O_1P = 2rR$;

2) доказать, что

$O_1O_2=\sqrt{R^2-2rR}$ (теорема Эйлера).

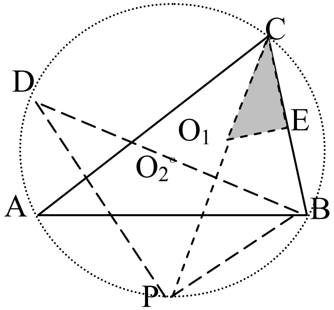


Рис. 28

Решение. 1) Проведем $O_1E \perp CB$, $O_1E=r$, и диаметр *DB* описанной окружности, DB=2R (рис. 28). Так как $\angle PCB = \angle PDB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, и $\angle CEO_1 = \angle DPB = 90^\circ$, то треугольники O_1EC и BPD подобны. Поэтому $\frac{CO_1}{DB} = \frac{EO_1}{PB}$ или $CO_1 \cdot PB = 2Rr$.

Так как треугольник PO_1B – равнобедренный (задача 2.7), то $CO_1 \cdot PB = CO_1 \cdot OP_1 = 2Rr$, что и требовалось доказать.

2) Проведем диаметр *DE* описанной окружности, проходящий через центр O_1 вписанной окружности (рис. 29). Используя теорему о пропорциональных отрезках хорд и касательных к окружности, получаем $DO_1 \cdot O_1E = CO_1 \cdot O_1P$ или $(R + O_1O_2)\cdot(R - O_1O_2) = 2Rr$. Выражая из последнего равенства O_1O_2, получаем $O_1O_2=\sqrt{R^2-2rR}$. Что и требовалось доказать

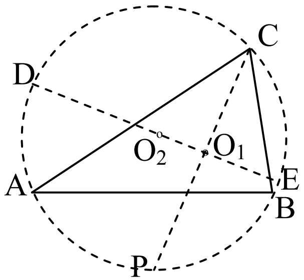


Рис. 29

Задача 2.8. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины *A*, *C* и точку пересечения высот треугольника *ABC*. Найдите угол *ABC*.

Решение. Если *E* — точка пересечения высот треугольника *ABC*, то $\angle AEC = 180^o - \angle ABC$ (рис. 30). Тогда

$\angle AOC = \cup AEC = 360^o - 2\angle AEC = 2\angle ABC$,

где *O* — центр второй окружности.

Поскольку $\angle AOC + \angle ABC = 180^o$, то $3\angle ABC = 180^o$.

Следовательно, $\angle ABC = 60^o$.

Ответ: 60^o.

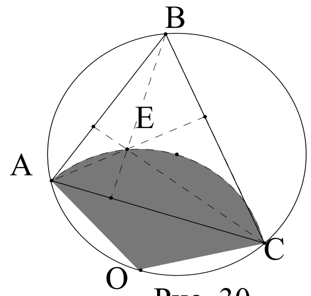


Рис. 30

Задача 2.9. Пусть BM и CN – высоты треугольника ABC, O –центр описанной около этого треугольника окружности. Доказать, что $AO \perp MN$.

Решение: Рассмотрим случай, когда треугольник ABC – остроугольный. Проведем диаметр AD, $\angle ABD = 90^\circ$. Обозначим через E точку пересечения *AD* и *MN* (рис. 31). Прямые *MN* и *CB* антипараллельны относительно прямых *AC* и *AB* (см. замечание к задаче 1.10), поэтому $\angle ANM = \angle ACB$. С другой стороны, $\angle ACB = \angle ADB$ как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, поэтому $\angle ANM = \angle ADB$. Кроме

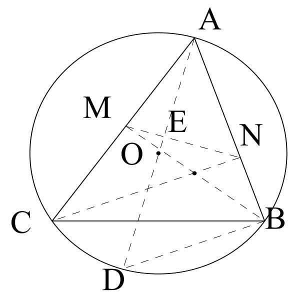


Рис. 31

того у треугольников ABD и AEN угол при вершине A – общий, поэтому $\angle AEN = \angle ABD = 90^\circ$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Случаи, когда один из углов треугольника тупой рассматриваются аналогично.

Задача 2.10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность и вокруг трапеции можно описать окружность. Найти радиусы этих окружностей, если основания трапеции равны a и b.

Решение. Пусть дана трапеция $ABCD$ $(BC||AD)$, $BC=a$, $AD=b$ $(b>a)$. Так как вокруг трапеции описана окружность, то $AB=CD$ (рис. 32). Так как в трапецию можно вписать окружность, то $BC+AD=2AB$, то есть $AB = \dfrac{a+b}{2}$.

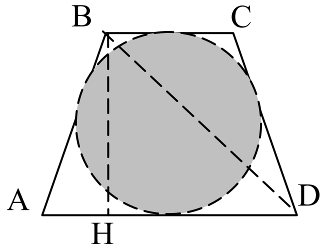


Рис. 32

Проведем $BH \perp AD$, $AH = \dfrac{b-a}{2}$ (задача 1.13).

Вычислим высоту трапеции

$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Так как высота трапеции равна диаметру вписанной окружности, то получаем формулу для вычисления радиуса вписанной окружности $r = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$.

Окружность, описанная около данной трапеции, является описанной для треугольника ABD. Для вычисления ее радиуса воспользуемся следствием из теоремы синусов (16). Имеем:

$$BD = \sqrt{BH^2 + DH^2} = \sqrt{ab + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6ab + a^2 + b^2}}{2},$$

$$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}; \quad R = \frac{BD}{2\sin A} = \frac{a+b}{8}\sqrt{6 + \frac{a^2+b^2}{ab}}.$$

Ответ: $r = \dfrac{\sqrt{ab}}{2}$, $R = \dfrac{a+b}{8}\sqrt{6 + \dfrac{a^2+b^2}{ab}}$.

Задача 2.11. Доказать, что если диагонали вписанного четырехугольника взаимно перпендикулярны, то его несмежные стороны стягивают дуги, сумма которых рана 180°.

Решение. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, его диагонали AC и BD пересекаются в точке E и $AC \perp BD$ (рис. 33).

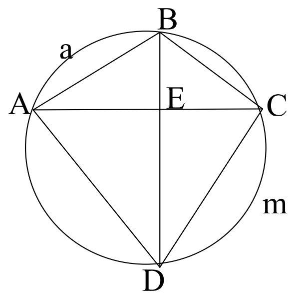


Рис. 33

Тогда $\angle CBD + \angle ACB = 90^\circ$. Так как углы CBD и ACB являются вписанными, то

$$\angle CBD = \frac{1}{2} \cup CmD, \angle ACB = \frac{1}{2} \cup AaB.$$

Следовательно,

$\dfrac{1}{2} \cup CmD + \dfrac{1}{2} \cup AaB = 90^\circ$ и $\cup CmD + \cup AaB = 180^\circ$, что и требовалось доказать.

Вневписанная окружность и ее свойства

Вневписанной окружностью называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон. Центром вневписанной окружности является точка пересечения биссектрис двух внешних углов и биссектрисы внутреннего угла треугольника при третьей вершине.

Задача 2.12. Вычислить радиус вневписанной окружности, если известны площадь, полупериметр и сторона треугольника, которой касается эта окружность.

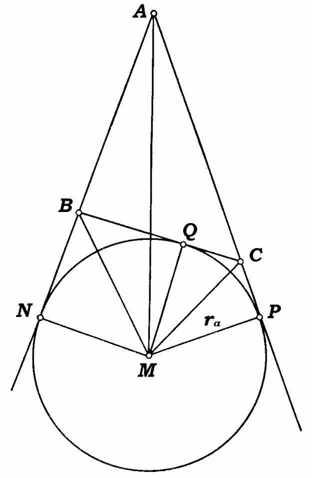


Рис. 34

Решение. Пусть дан треугольник *ABC*, где *BC=a, AC=b и AB=c*. Точка *M* – центр вневписанной окружности, касающейся стороны *a*. Обозначим радиус вневписанной окружности через r_a (рис.34). Чтобы вычислить радиус вневписанной окружности рассмотрим площади треугольников *ABC, ABM, ACM, BCM* .

Имеем:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} - S_{BCM} = \frac{cr_a}{2} + \frac{br_a}{2} - \frac{ar_a}{2} =$$

$$= \frac{r_a(b+c-a)}{2} = r_a(p-a),$$

где *p* – полупериметр треугольника *ABC*. Следовательно,

$$r_a = \frac{S}{p-a}.$$

Аналогично доказывается, что $r_b = \dfrac{S}{p-b};\ r_c = \dfrac{S}{p-c}$,

где r_b и r_c - радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон треугольника *b* и *c* соответственно.

Задача 2.13. Вневписанная окружность треугольника *ABC* касается стороны *BC* и продолжений сторон *AB* и *AC*. Доказать, что отрезок от вершины А треугольника до точки касания вневписанной окружности, расположенной на продолжении стороны, равен полупериметру.

Решение. Пусть дан треугольник *ABC*, где *BC=a*, *AC=b* и *AB=c*, *N* и *P* – точки касания вневписанной окружности с продолжениями сторон *AB* и *AC* (рис. 34). Тогда *AN=AB+BN=c+BQ; AP=AC+CP=b+QC* (*BN=BQ, CP=QC*, как отрезки касательных, проведенных из одной точки). Так как *AN=AP*, то *2AN=b+c+BQ+QC=b+c+a=2p*. Следовательно, *AN=p*.

Что и требовалось доказать.

Задача 2.14. Продолжение биссектрисы угла *B* треугольника *ABC* пересекают описанную окружность в точке *M; O* – центр вписанной окружности, I_b - центр вневписанной окружности, касающейся стороны *AC*. Доказать, что точки *A, C, O* и I_b лежат на окружности с центром в точке *M* (рис. 35).

Решение. Точка М является центром окружности, описанной около треугольника АОС (задача 2.6).Докажем, что точка I_b лежит на этой окружности. (1) Так как треугольник OAI_b прямоугольный (АО и АI_b - биссектрисы смежных углов) и $\angle AOM = \angle MAO = \varphi$, то $\angle MAI_b = \angle MI_bA = 90° - \varphi$, а значит, $MA = MI_b$. Таким образом, MI_b = *MA= MO =MC,* что и требовалось доказать.

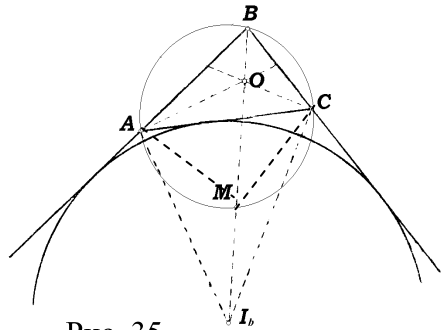


Рис. 35

Задачи для самостоятельного решения

1. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 1 и $\sqrt{13}$, а медиана третей стороны равна 2. (*Ответ:* $\sqrt{3}$).

2. Основание равнобедренного треугольника равно $\sqrt{32}$, а медиана боковой стороны – 5.Найти длины боковых сторон треугольника. (*Ответ:* 6*).*

3. В равнобедренном треугольнике длина боковой стороны равна $4\sqrt{10}$, а длина медианы, проведенной к боковой стороне, равна $6\sqrt{3}$. Найти длину основания треугольника. (*Ответ:* 10).

4. Две стороны треугольника равны соответственно 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, перпендикулярны. Найти площадь треугольника (*Ответ :* $4\sqrt{11}$ см^2).

5. Медианы треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Найти площадь треугольника. (*Ответ:*8 см^2*).*

6. Две медианы треугольника взаимно перпендикулярны и равны соответственно 3 см и 4 см. Найти площадь треугольника. (*Ответ:*8 см^2*).*

7. Треугольник АВС, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку *M* пересечения медиан треугольника с вершинами треугольника. Найти площадь треугольника *BMC.* (*Ответ:*28 см^2).

8. Доказать, что если одна из медиан треугольника в полтора раза больше стороны, к которой она проведена, то две другие медианы треугольника взаимно перпендикулярны.

9. Найти боковые стороны равнобедренного треугольника, если тангенс угла при основании треугольника равен 3 и длина

медианы, проведенной к боковой стороне равна 6. (*Ответ:* $4\sqrt{5}$).

10. Площадь тупоугольного треугольника АВС равна $9\sqrt{7}$, его медианы АК и СМ пересекаются под углом $\alpha = \arccos\frac{3}{4}$, АК : СМ=3:2. Найти стороны треугольника АВС. (*Ответ* АС=4, АВ=$2\sqrt{58}$, ВС=$2\sqrt{43}$).

11. Площадь остроугольного треугольника АВС равна $24\sqrt{2}$, его медианы АК и СМ пересекаются под углом $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$, АК + СМ=15. Найти стороны треугольника АВС. (*Ответ:* АС=ВС=$2\sqrt{17}$, АВ=$8\sqrt{2}$, или ВС=$8\sqrt{2}$, АС=АВ=$2\sqrt{17}$).

12. В треугольнике ABC сторона AC равна b, сторона AB равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в точке D такой, что $DA = DB$. Найти длину стороны BC. (*Ответ:* $\sqrt{b(b+c)}$).

13. Определить площадь треугольника, если две его стороны равны 35 см и 14 см, а биссектриса угла между ними содержит 12 см. (*Ответ: 235,2 см^2*).

14. Дан треугольник ABC, в котором угол B равен 30°, $AB = 4$, $BC = 6$. Биссектриса угла B пересекает сторону AC в точке D. Определить площадь треугольника ABD. (*Ответ: 2,4*).

15. В треугольнике ABC проведена биссектриса BE, которую центр O вписанной окружности делит в отношении $BO : OE = 2$. Найти AB, если $AC = 7$, $BC = 8$. (*Ответ: 6*).

16. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CH и AH_1. Известно, что $AC = 2$ и площадь круга, описанного около треугольника HBH_1, равна $\frac{\pi}{3}$. Найти угол между высотой CH и стороной BC. (*Ответ:* 30°).

17. Дан треугольник со сторонами 4, 8, 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне. (*Ответ:* $\sqrt{14}$).

18. Биссектриса AD равнобедренного треугольника ABC делит его на треугольники ABD и ACD площадью 4см^2 и 2см^2 соответственно. Найти стороны треугольника, если AC - его основание. (*Ответ:* $\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt[4]{15}}, \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt[4]{15}}, \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt[4]{15}}$).

19. В равнобедренном треугольнике ABC $(AB = BC)$ проведена биссектриса AD. Площади треугольников ABD и ADC равны S_1 и S_2. Найти длину основания треугольника. (*Ответ:* $2\sqrt{\frac{S_2^2(S_1+S_2)^2}{(4S_1^2-S_2^2)}}$).

20. Доказать, что если биссектриса одного из углов треугольника равна произведению заключающих ее сторон, деленному на их сумму, то этот угол равен 120°.

21. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 72°, а биссектриса этого угла имеет длину, равную *m*. Найти длины сторон треугольника. (*Ответ:* $m, \frac{m(\sqrt{5}+1)}{2}, \frac{m(\sqrt{5}+1)}{2}$*).*

22. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 36°, а биссектриса угла при основании равна $\sqrt{20}$. Найти длины сторон треугольника. (*Ответ:* $2\sqrt{5}, 5+\sqrt{5}, 5+\sqrt{5}$).

23. Медиана BM треугольника ABC равна его высоте AH. Найдите угол MBC. *(Ответ:* 30° или 150°).

24. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Известно, что $CH = AB$. Найдите угол ACB. *(Ответ*: 45° или 135º).

25. Точки A_1, B_1, C_1 , — основания высот треугольника ABC. Углы треугольника $A_1B_1C_1$ равны 90°, 60° и 30°. Найдите углы треугольника ABC. *(Ответ*: 45°, 75°,60° или 135°, 15°, 30°, или 120°, 15°, 45° или 105°, 30°, 45°).

26. Точки D и E – основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведенных из вершин A и C соответственно. Известно, что $\frac{DE}{AC} = k, BC = a, AB = b$. Найдите сторону AC. *(Ответ*: $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$ или $\sqrt{a^2+b^2+2abk}$).

27. Углы при вершинах A и C треугольника ABC равны 45° и 60° соответственно; AM, BN и CK — высоты треугольника. Найти отношение MN : KN. (*Ответ:* $\frac{\sqrt{3}}{2}$).

28. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Известно, что угол $\angle BAC = 120^\circ$ и $AA_1=6$. Найти высоту AP треугольника AB_1C_1. (*Ответ:3).*

29. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке H . Известно, что отрезок CH равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите угол ACB . *(Ответ*: 60° или 120º).

30. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника. *(Ответ*: 195).

31. Найти площадь прямоугольного треугольника, если известны радиусы R и r описанного и вписанного в него кругов. (*Ответ:* $R^2 + 2Rr$*).*

32. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB вершины A,C и точка пересечения высот расположены на одной окружности радиуса 5. Найти площадь треугольника ABC, если AC=6. (*Ответ*:432/25).

33. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении BD:CD=2:1. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису? (*Ответ*: 3:1).

34. В треугольнике ABC площадью 40 см^2 биссектриса AD делит сторону BC на отрезки BD и DC, причем BD:DC=3:2. Биссектриса AD пересекает медиану BK в точке E. Найти площадь четырехугольника EDCK. (*Ответ*:11 см^2).

35. В треугольнике ABC биссектриса AH делит медиану BE в отношении BK:KE=2, а угол ACB равен 45^o. Найти отношение площади треугольника BCE к площади описанного около этого треугольника круга. (*Ответ*: $\frac{4}{5\pi}$).

36. Продолжения медиан AM и BK треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках E и F соответственно, причем AE:AM=2:1, BF:BK=3:2. Найти углы треугольника ABC. (*Ответ*: $\frac{\pi}{2}, arctg 2, \frac{\pi}{2} - arctg 2$).

37. Большее основание трапеции в два раза больше ее меньшего основания. Через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найти отношение высоты каждой из двух полученных трапеций к высоте данной трапеции. (*Ответ:* 1:3, 2:3).

38. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны , а ее площадь равна a^2. Определить высоту трапеции. (*Ответ*: *a*).

39. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна *h*, а боковая сторона видна из центра описаннй окружности под углом 60^o. (*Ответ*: $h^2\sqrt{3}$).

40. Сумма квадратов параллельных сторон трапеции равна 228. Определить длину отрезка, параллельного этим сторонам и делящего площадь трапеции пополам. (*Ответ*: 12).

41. Найти среднюю линию равнобедренной трапеции с высотой *h*, если боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 120°. (*Ответ:* $\frac{h\sqrt{3}}{3}$).

42. Центр окружности, описанной около равнобедренной трапеции делит ее высоту в отношении 3:4 (считая от большего основания. Найти основания трапеции, если ее средняя линия равна высоте, а радиус окружности равен 10. (*Ответ:* 12 и 16).

43. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Известно, что BD=7, CD=8, DC<4, $\angle BAD = 120^\circ$. Определить угол CAD. *(Ответ*: $\arccos(-1/7)$).

44. Четырехугольник ABCD вписан в окружность. Известно, что AB=7, AC=5, BC<5, $\angle ADC = 135^\circ$. Определить угол ADB. (*Ответ*: $\arccos\left(-1/5\sqrt{2}\right)$).

45. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3см и 9см. Найти стороны трапеции. (*Ответ:* $\frac{36}{\sqrt{10}};\frac{12}{\sqrt{10}};\frac{18}{\sqrt{10}};\frac{30}{\sqrt{10}}$).

46. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 и 2. Найти площадь трапеции. (*Ответ:*3,6).

47. Основания трапеции равны 4 и 16. Найти радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют. (*Ответ:* 4 и $\frac{5\sqrt{41}}{4}$).

48. Равнобедренная трапеция ABCD с основаниями AD и BC описана около окружности с центром O. Найти площадь трапеции, если AB=4, BO=1. (*Ответ*: $2\sqrt{15}$).

49. Дан вписанный четырехугольник с взаимно перпендикулярными диагоналями. Докажите, что ломаная, проходящая через центр описанной окружности и две противоположные вершины четырехугольника делит его на две равновеликие части.

50. В окружности радиуса R проведены две пересекающиеся перпендикулярные хорды AB и CD. Доказать, что $AC^2+BD^2=4R^2$.

51. Боковая сторона неравнобедренной трапеции равна 12 и образует с ее основанием угол 60°. Основания трапеции равны 16 и 40. Найти длину отрезка, соединяющего середины оснований. (*Ответ*: 12 или $6\sqrt{13}$).

52. Сумма внутренних углов при основании AD трапеции ABCD равна 135°. В трапецию вписана окружность, причем боковая сторона AB делится точкой касания на отрезки длины $\sqrt{2}$ и $4\sqrt{2}$. Определить длину боковой стороны CD трапеции. (*Ответ*: 40 или 40/7).

53. Косинус угла между боковыми сторонами AD и BC трапеции ABCD равен 0,8. В трапецию вписана окружность, причем сторона AD делится точкой касания на отрезки длины 1 и 4. Определить длину боковой стороны BC трапеции. (*Ответ*: 4 или 100/7).

54. Диагонали выпуклого четырёхугольника равны a и b, а отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны между собой. Найти площадь четырёхугольника.
(*Ответ*: $\frac{ab}{2}$).

55. Доказать следующие соотношения:

a) $r_a+r_b+r_c=4R+r$; b) $S=\sqrt{rr_ar_br_c}$;

c) $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}$; $\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a}$

где: a, b и c – стороны треугольника;
h_a, h_b, h_c - высоты, проведенные из вершин треугольника к сторонам a, b и c соответственно;
r_a, r_b, r_c - радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон a, b и c соответственно;
R – радиус описанной окружности;
r – радиус вписанной окружности;
S – площадь треугольника;

56. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке K, а вневписанная - в точке L. Доказать, что *CK=BL=(a+b-c)/2,* где *a, b, c* – длины сторон треугольника.

57. Доказать, что в прямоугольном треугольнике с гипотенузой с $r_c = r + r_a + r_b$.

58. Доказать, что сторона BC треугольника ABC видна из центра O вписанной окружности под углом $90° + \angle A/2$, а из центра I_a вневписанной окружности под углом $90° - \angle A/2$.

59. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB - в точке L. Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Доказать, что прямая KL параллельна, а прямая MN перпендикулярна биссектрисе угла B треугольника.

60. В треугольнике ABC угол C прямой. Докажите, что $r_c = \dfrac{a+b+c}{2}$.

61. Радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, равен 1. Известно, что на этой окружности лежит центр другой окружности, проходящей через вершины A, C и точку пересечения высот треугольника ABC. Найдите AC. (*Ответ*: $\sqrt{3}$).

62. В выпуклом четырехугольнике ABCD известно, что $\angle CBD = 58^\circ, \angle ABD = 44^\circ, \angle ADC = 78^\circ$. Найти угол CAD.
(*Ответ*: 58°).

Литература

1. Александров А.Д. Геометрия: учебное пособие для 8 кл. с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2002. – 240с.
2. Александров А.Д. Геометрия: учебное пособие для 9 кл. с углубленным изучением математики / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2004. – 240с.
3. Атанасян Л.С. Геометрия, 7 – 9: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 2009. – 384с.
4. Атанасян Л.С. Геометрия: доп. главы к шк. учеб. 8 кл.: учебное пособие для учащихся шк. и кл. с углубленным изучением математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1996. – 205с.
5. Атанасян Л.С. Геометрия: доп. главы к шк. учеб. 9 кл.: учебное пособие для учащихся шк. и кл. с углубленным изучением математики / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – М.: Просвещение, 1997.
6. Белоносов М.В. Задачи вступительных экзаменов по математике: учебное пособие / М.В. Белоносов, М.В. Фокин. − Новосибирск: Изд-во Новосиб. Ун-та: Сиб. Унив. изд-во, 2002. – 215с.
7. Гордин Р.К. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С4 / Гордин Р.К.: под ред. А.Л. Семенова и И.В. Ященко. – М. МЦНМО. 2010 - 148 с.
8. Готман Э.Г. Задача одна – решения разные. Геометрические задачи / Э.Г. Готман, С. Залман. – М.: Просвещение, 2000. – 224с.
9. Готман Э.Г. Задачи по планиметрии и методы их решения / Э.Г. Готман. – М.: Просвещение, 1996. – 241с.
10. Егерев В.К. Сборник задач по математике для поступающих в вузы: учебное пособие / В.К.Егерев, В.В. Зайцев и др.; под ред. Сканави М.И. – М.: Издательский Дом ОНИКС: Альянс-В, 2003. – 608с.

11. Зив Б.Г. Задачи по геометрии для 7 – 11 классов./ Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.П. Баханский. – М.: Просвещение, 2009. – 271с.
12. Куланин Е.Д. 3000 конкурсных задач по математике. / Е.Д. Куланин, В.П. Норин, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – Изд. 5-е испр. – М.: Айрис-пресс, 2003. - 624с.
13. Понарин Я. П. Элементарная геометрия: В 2 т. Т. 1: Планиметрия, преобразования плоскости./ Я.П. Понарин. – М.: МЦНМО, 2004. – 312с.
14. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В.В. Просолов. – Изд. 4-е, допол. – М.: МЦНМО, 2001. – 584 с
15. Сборник задач по математике для поступающих в вузы / под ред. Прилепко А.И. – М.: Высшая школа, 1989. – 271с.
16. Шарыгин И.Ф. Математика. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы / И.Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 1999. – 304с.
17. Шарыгин И.Ф. Стандарт по математике: 500 геометрических задач: кн. для учителя / И.Ф. Шарыгин. – М.: Просвещение, 2005. – 205с.

Методическое пособие

Осипенко Лариса Анатольевна
Стацевичуте Елена Эдмундовна

Опорные задачи в планиметрии
Серия «Университетский лицей»

Компьютерный набор авторов

МОУ Лицей ИГУ г. Иркутска
Г. Иркутск, ул. Курчатова, 13а
Тел./факс (3952) 41-05-35
e-mail: ligu_irk@mail.ru

Подписано в печать 02.06.10. Формат 60х84 1/16
Бумага офисная. Печать DUPLO.
Заказ 8. Тираж 200 экз. Усл. печ .л. 3,0

УНИВЕРСИТЕТСКИЙ ЛИЦЕЙ

Вып.1 О.В.Кузьмин. Принцип Дирихле.
Вып.2 Э.А. Маричева. Практикум к курсу «Биология человека».
Вып.3 Э.Ф. Дубинина, Л.Н. Шеметова. Компьютерная графика.
Вып.4 Э.Ф. Дубинина, Л.Н. Шеметова. Компьютерная графика. CorelDRAW
Вып.5 Л.А. Осипенко. Комбинации сферы и многогранников. Задачи и упражнения.
Вып. 6 Р.М. Островская, В.И. Чемерилова В.И. Решаем задачи по генетике. Том 1.
Вып. 7 Р.М. Островская, В.И. Чемерилова В.И. Решаем задачи по генетике. Том 2.
Вып.8 Л.А. Осипенко, Е.Э. Стацевичуте. Опорные задачи планиметрии.